# PAL: 4. cvičení

Tomáš Sieger

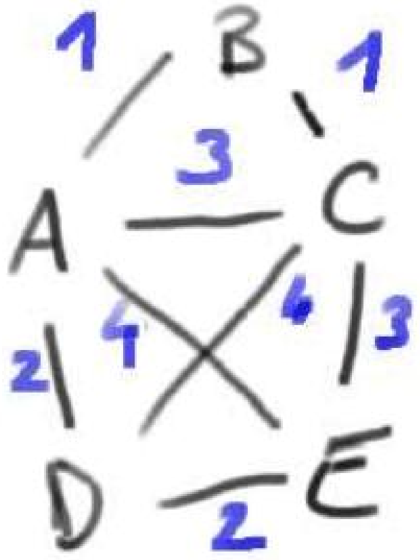
15. 10. 2020

# Organizace

# Opakování z minula

# Př. 9: matice s podložkou

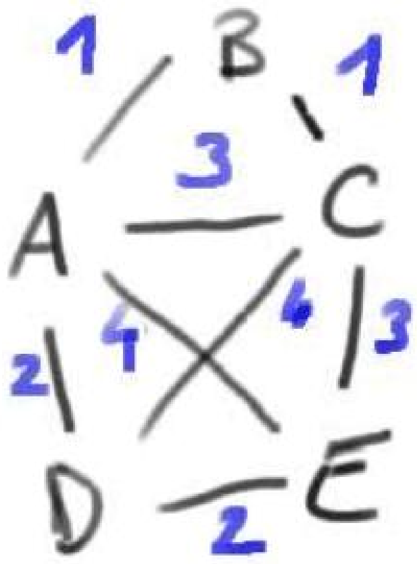
Předpokládejme, že graf je zadán maticí vah jednotlivých hran. Význačná hodnota v této matici (např. nekonečno, minimální/maximální hodnota číselného typu, NaN apod) indikuje, že mezi příslušnými vrcholy hrana neexistuje. Modifikujte Jarníkův-Primův algoritmus tak, aby nezávisel na počtu hran v grafu a měl složitost $O(n^2)$, kde $n$ je počet uzlů grafu.



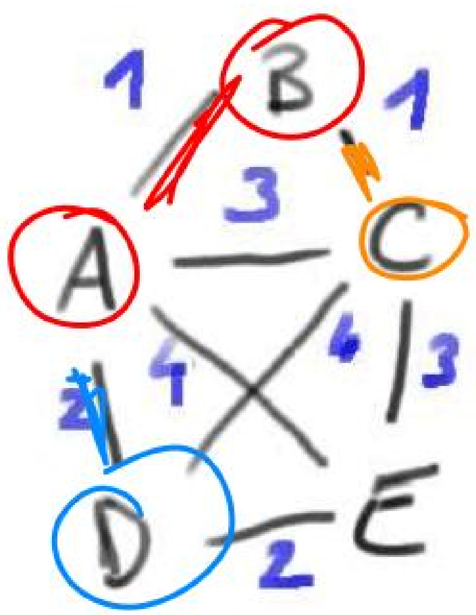

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| A | X | 1 | 3 | 3 | 4 |
| B | 1 | X | 1 | / | / |
| C | 3 | 1 | X | 4 | 3 |
| D | 3 | / | 4 | X | 2 |
| E | 4 | / | 3 | 2 | X |

# Př. 9: matice s podložkou

Předpokládejme, že graf je zadán maticí vah jednotlivých hran. Význačná hodnota v této matici (např. nekonečno, minimální/maximální hodnota číselného typu, NaN apod) indikuje, že mezi příslušnými vrcholy hrana neexistuje. Modifikujte Jarníkův-Primův algoritmus tak, aby nezávisel na počtu hran v grafu a měl složitost $O(n^2)$, kde $n$ je počet uzlů grafu.




| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| A | × | 1 | 3 | 3 | 4 |
| B | 1 | × | 1 | – | – |
| C | 3 | 1 | × | 4 | 3 |
| D | 3 | – | 4 | × | 2 |
| E | 4 | – | 3 | 2 | × |



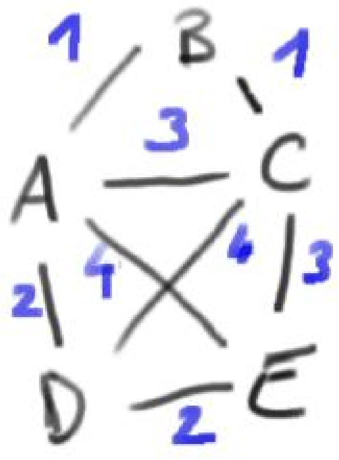

| | A | B | C | D | E |
|---|---|---|---|---|---|
| A | X | 1 | 3 | 3 | 4 |
| B | 1 | X | 1 | / | / |
| C | 3 | 1 | X | 4 | 3 |
| D | 3 | / | 4 | X | 2 |
| E | 4 | / | 3 | 2 | X |

$K = \{v_0\} = \{A\}$

$O(n^3)$ do until $|K| = |V|$

$(u,v) = \arg\min d(i,j) \quad i \in K, j \in K'$

$\left.\begin{array}{l} \forall i \in K \\ \forall j \notin K \end{array}\right\} O(n^2) = O(m)$



| | A | B | C | D | E | $d_A$ | $d_{AB}$ | $d_{ABC}$ | $d_{ABCD}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | × | 1 | 3 | 3 | 4 | × | × | × | × |
| B | 1 | × | 1 | – | – | $1_A$ | × | × | × |
| C | 3 | 1 | × | 4 | 3 | $3_A$ | $1_B$ | × | × |
| D | 3 | – | 4 | × | 2 | $3_A$ | $3_A$ | $3_A$ | × |
| E | 4 | – | 3 | 2 | × | $4_A$ | $4_A$ | $3_C$ | $2_D$ |

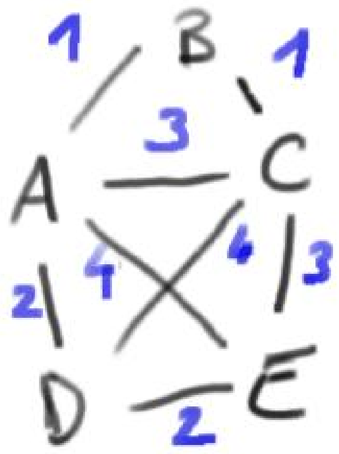
B C D E

```
K = {v_0}, v_0 lib.
dokud |K| < |V|
   i ∈ argmin d
   K = K ∪ {i}
   d[i] = ∞
   ∀ j ∉ K
      if d[j] > C_ji
         d[j] = C_ji
```

```
init:
   d[v_0] = ∞
   ∀ i ≠ v_0
      d[i] = C_i v_0
```

# Př. 3/3: Eulerovský cyklus

Kolika způsoby lze do kružnice délky 20 vložit další tři hrany tak, aby výsledný graf obsahoval Eulerovský cyklus (=uzavřený eulerovský tah)? Vkládáme pouze hrany, počet uzlů se nemění.

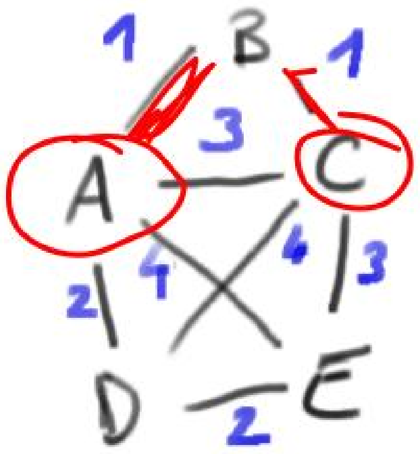



| | A | B | C | D | E | $d_A$ | $d_{AB}$ | $d_{ABC}$ | $d_{ABCD}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | × | 1 | 3 | 3 | 4 | × | × | × | × |
| B | 1 | × | 1 | / | / | $1_A$ | × | × | × |
| C | 3 | 1 | × | 4 | 3 | $3_A$ | $1_B$ | × | × |
| D | 3 | / | 4 | × | 2 | $3_A$ | $3_A$ | $3_A$ | × |
| E | 4 | / | 3 | 2 | × | $4_A$ | $4_A$ | $3_C$ | $2_D$ |

B C D E

$K = \{v_0\}$, $v_0$ lib.
dokud $|K| < |V|$
  $i \in \operatorname{argmin} d$
  $K = K \cup \{i\}$
  $d[i] = \infty$
  $\forall j \notin K$
    if $d[j] > C_{ji}$
      $d[j] = C_{ji}$

init:
  $d[v_0] = \infty$
  $\forall i \neq v_0$
    $d[i] = C_{i v_0}$




| | A | B | C | D | E | $d_A$ | $d_{AB}$ | $d_{ABC}$ | $d_{ABCD}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | × | 1 | 3 | 3 | 4 | × | × | × | × |
| B | 1 | × | 1 | / | / | $1_A$ | × | × | × |
| C | 3 | 1 | × | 4 | 3 | $3_A$ | $1_B$ | × | × |
| D | 3 | / | 4 | × | 2 | $3_A$ | $3_A$ | $3_A$ | × |
| E | 4 | / | 3 | 2 | × | $4_A$ | $4_A$ | $3_C$ | $2_D$ |
| | | | | | | B | C | D | E |

$K = \{v_0\}$, $v_0$ lib.

dokud $|K| < |V|$ MAX

 $i \in \arg\min d$

 $K = K \cup \{i\}$

 $d[i] = \infty$

 $\forall j \notin K$

  if $d[j] > C_{ji}$

   $d[j] = C_{ji}$

$O(n)$

$O(n^2)$

init:

 $d[v_0] = \infty$

 $\forall i \neq v_0$

  $d[i] = C_{i v_0}$

Yes 7 100%

No 0 0%

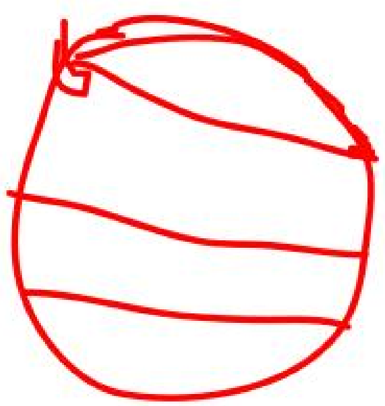
7/54

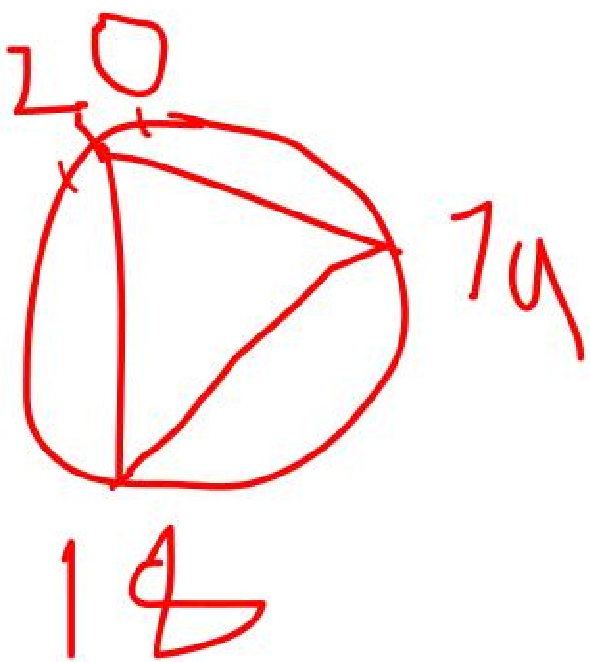
# Př. 3/3: Eulerovský cyklus

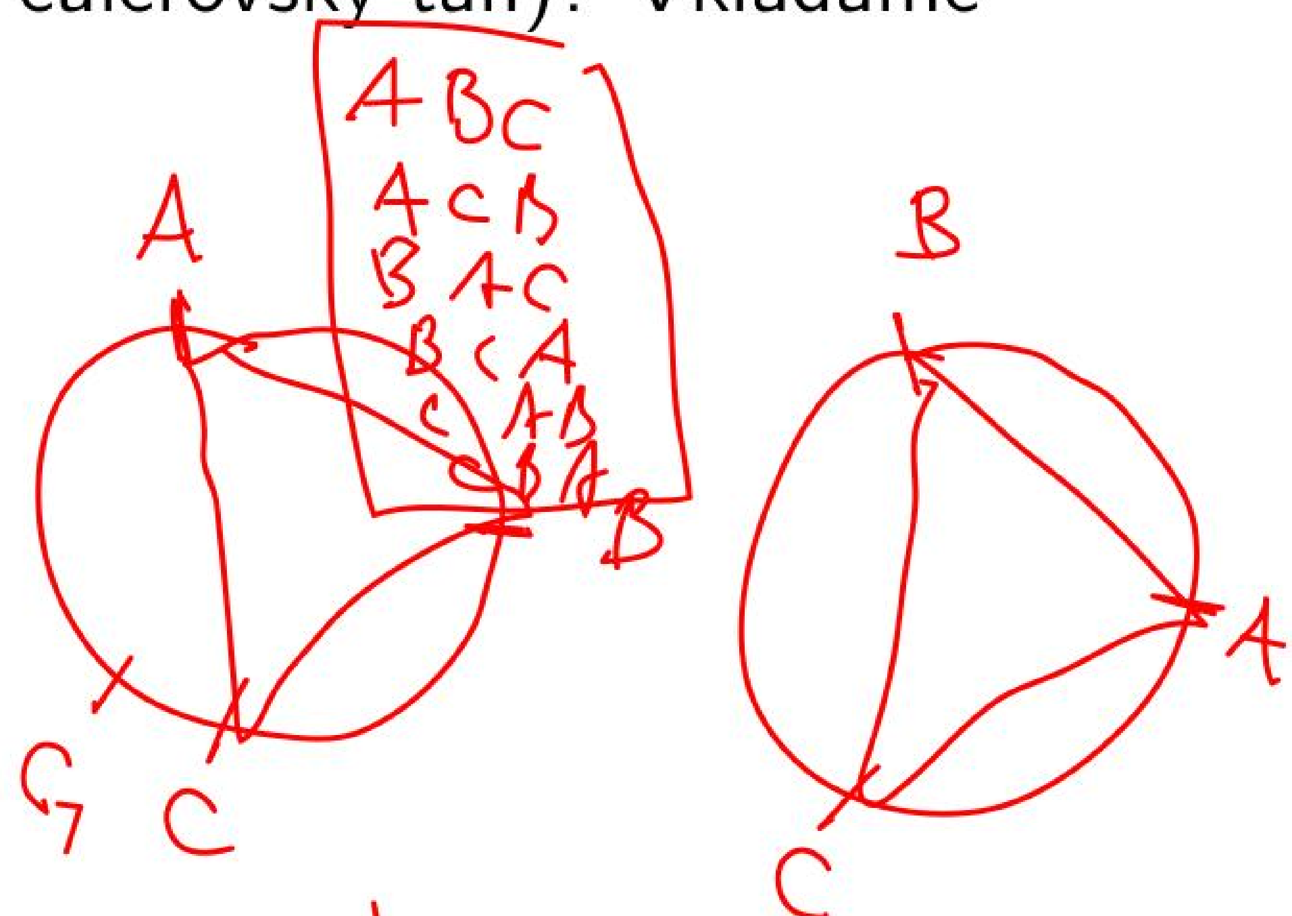
Kolika způsoby lze do kružnice délky 20 vložit další tři hrany tak, aby výsledný graf obsahoval Eulerovský cyklus (=uzavřený eulerovský tah)? Vkládáme pouze hrany, počet uzlů se nemění.

# Př. 3/3: Eulerovský cyklus

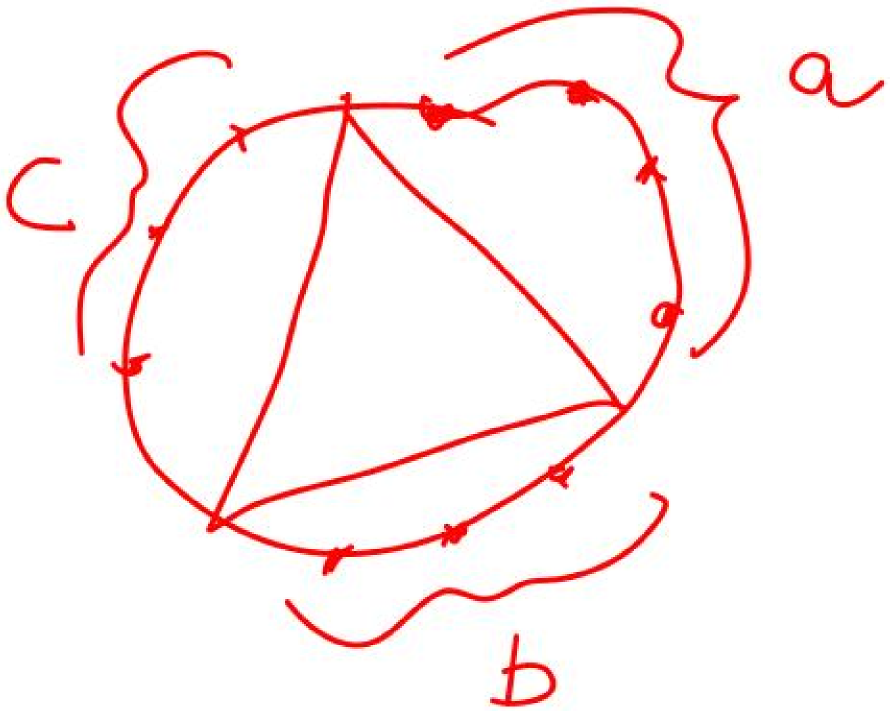
Kolika způsoby lze do kružnice délky 20 vložit další tři hrany tak, aby výsledný graf obsahoval Eulerovský cyklus (=uzavřený eulerovský tah)? Vkládáme pouze hrany, počet uzlů se nemění.






$$\binom{20}{3} = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3!}$$




$$a+b+c+3=20$$

$$\boxed{a+b+c=17}$$

| $a$ | $\left\lfloor \frac{17-a}{2} \right\rfloor$ | | $b$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 8 | 0..8 | 9 |
| 1 | 8 | 1..8 | 8 |
| 2 | 7 | 2..7 | 6 |
| 3 | 7 | 3..7 | 5 |
| 4 | 6 | 4..6 | 3 |
| 5 | 6 | 5..6 | 2 |
| | | | 33 |

| | | |
|---|---|---|
| Yes | 5 | 83% |
| No | 1 | 16% |

# Př. 3/5: cesty délky 3

Popište, jak najdete a vypíšete všechny cesty délky 3 v acyklickém prostém grafu (bez násobných hran). Jaký je jejich maximální možný počet v závislosti na počtu uzlů grafu? Jaká bude asymptotická složitost Vašeho algoritmu?

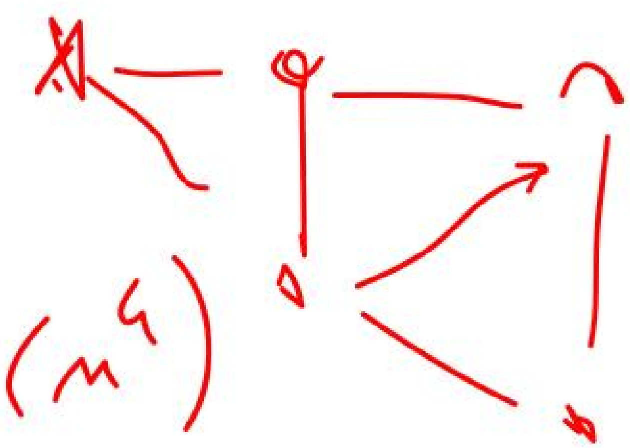
# Př. 3/5: cesty délky 3

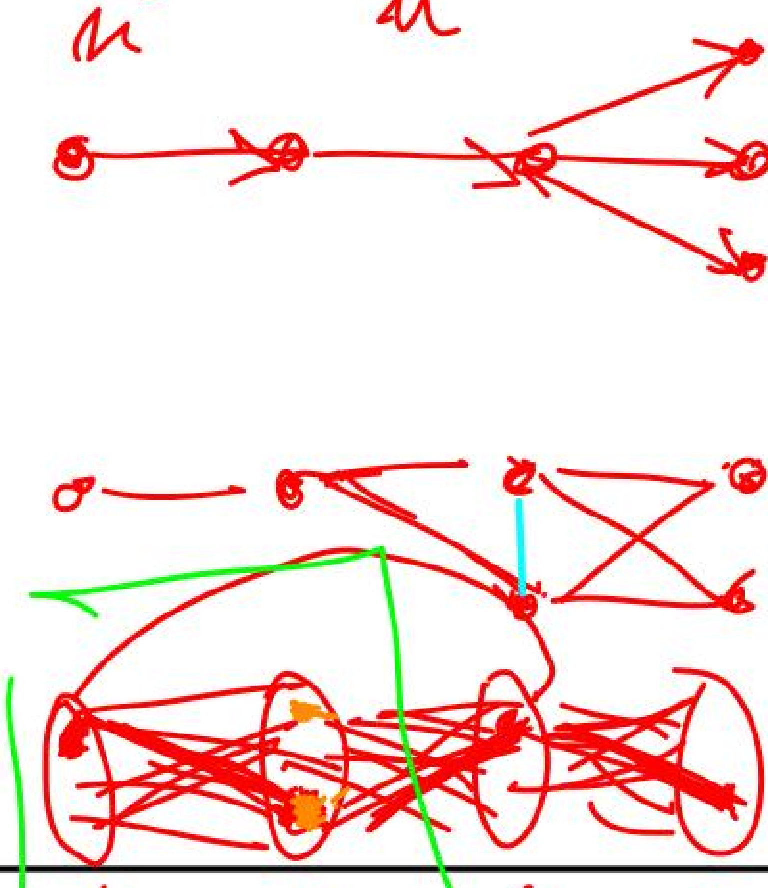
Popište, jak najdete a vypíšete všechny cesty délky 3 v acyklickém prostém grafu (bez násobných hran). Jaký je jejich maximální možný počet v závislosti na počtu uzlů grafu? Jaká bude asymptotická složitost Vašeho algoritmu?

$|E| \cdot |V-1| \cdot |V-3|$

$n^2 \quad n \quad n$

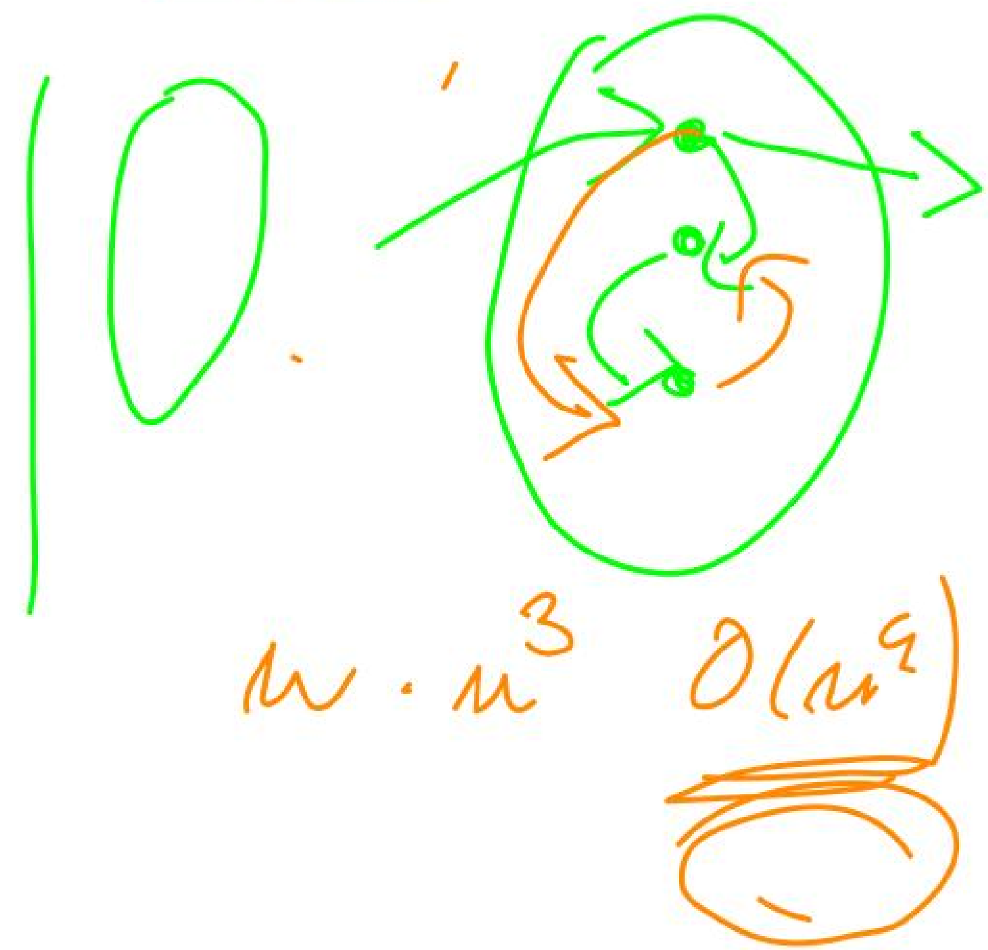
$O(n^4)$





3 cesty

4 cesty



$n \cdot n^3 \quad O(n^4)$

$O(n^2)$

$\frac{n}{4} \cdot \frac{n}{4} \cdot \frac{n}{4} \cdot \frac{n}{4} = \left(\frac{n}{4}\right)^4 = O(n^4)$

$\frac{n}{4} \quad \frac{n}{2}$

$\frac{n}{4} \quad \frac{n}{4} \quad \frac{n}{4} \quad \frac{n}{4}$

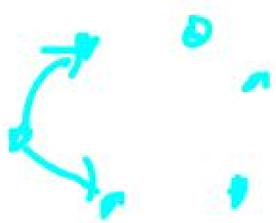
| | | |
|---|---|---|
| Yes | 8 | 100% |
| No | 0 | 0% |

# Př. 3/6: orientace kružnice

Orientujte kružnici se 7 vrcholy tak, aby vznikl acyklický graf. Kolika navzájem neizomorfními způsoby to lze udělat?

# Př. 3/6: orientace kružnice

Orientujte kružnici se 7 vrcholy tak, aby vznikl acyklický graf. Kolika navzájem neizomorfními způsoby to lze udělat?



4, 3
5, 2
6, 1

4, 1, 1, 1
3, 2, 1, 1
3, 1, 2, 1
2, 2, 2, 1

2, 1, 1, 1, 1, 1

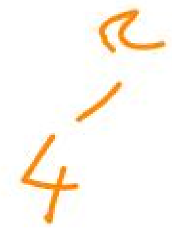
# Př. 3/8: homogenní graf

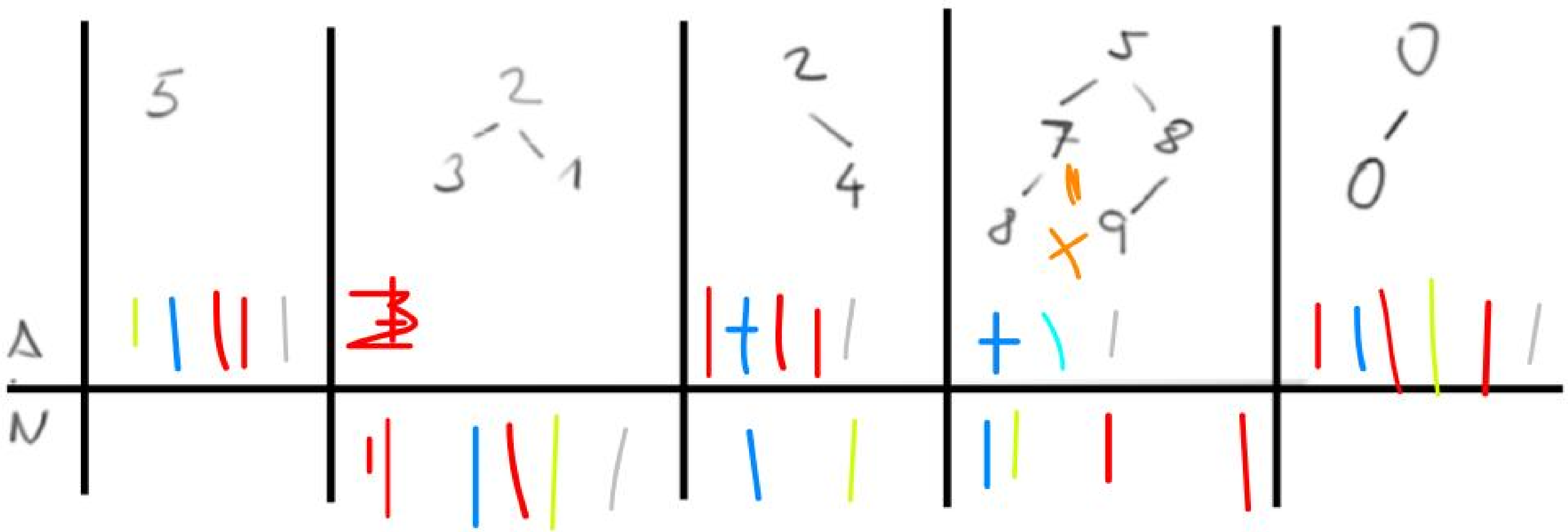
Orientovaný graf prohlásíme za směrově homogenní, pokud vzdálenost (= počet hran na nejkratší možné cestě) každé dvojice uzlů (kořen, list) je vždy stejně velká bez ohledu na to, který kořen nebo list zvolíme. Formulujte efektivní algoritmus, který rozhodne, zda daný graf je směrově homogenní a určete jeho asymptotickou složitost. Lze algoritmus zrychlit, pokud víme, že graf je acyklický?

# Haldy

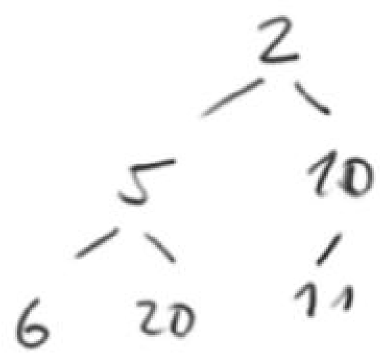
Binární haldy?

Binární haldy?

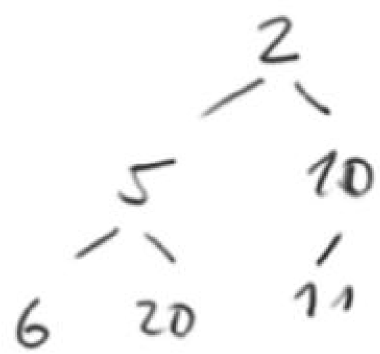




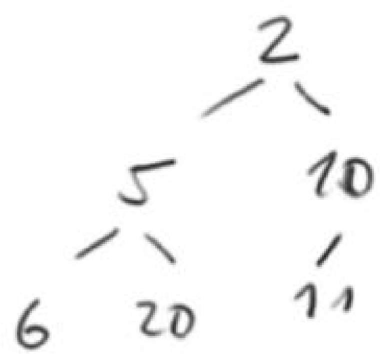
INSERT(1)



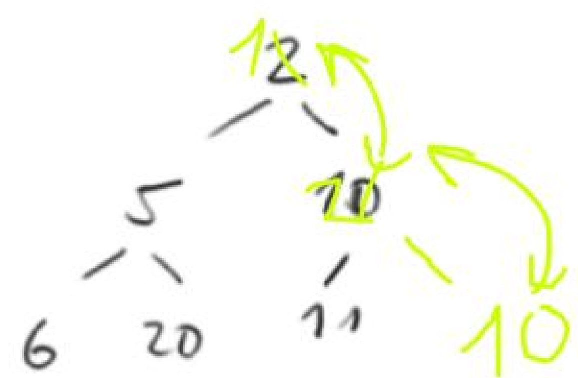
DELETEMIN()



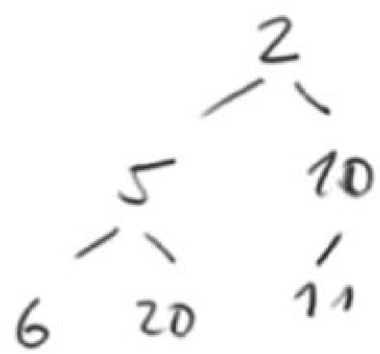
INSERT(1)



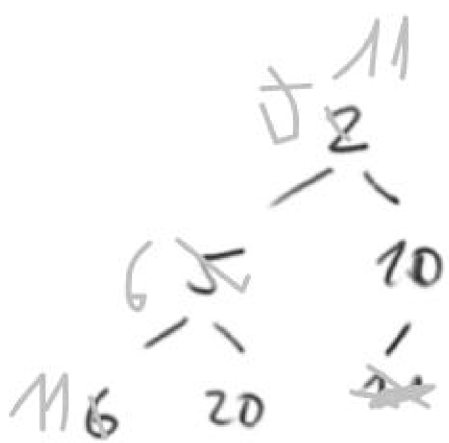
INSERT(1)



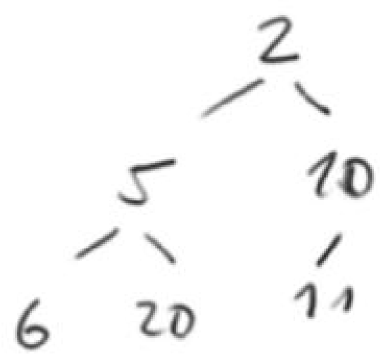
DELETEMIN()



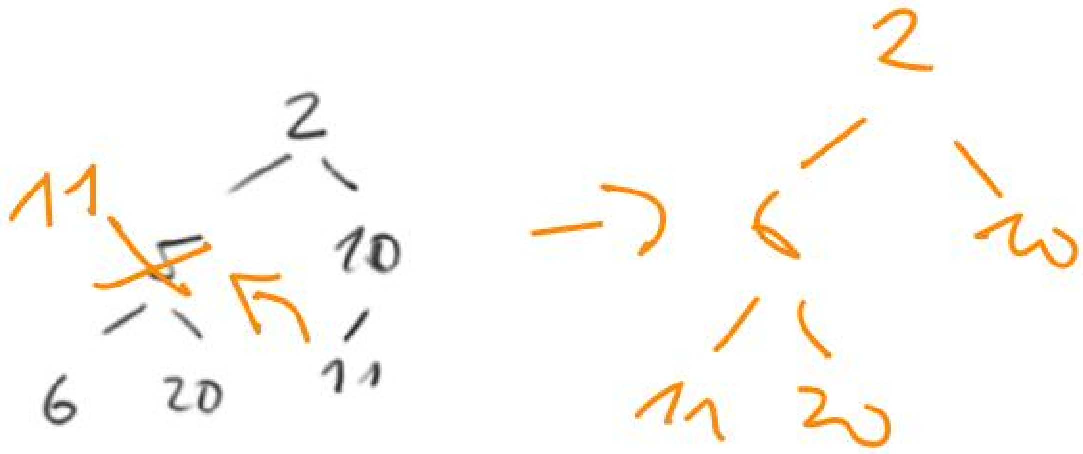
DELETEMIN()



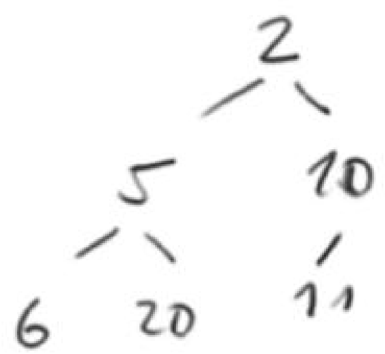
DELETE(5)



DELETE(5)



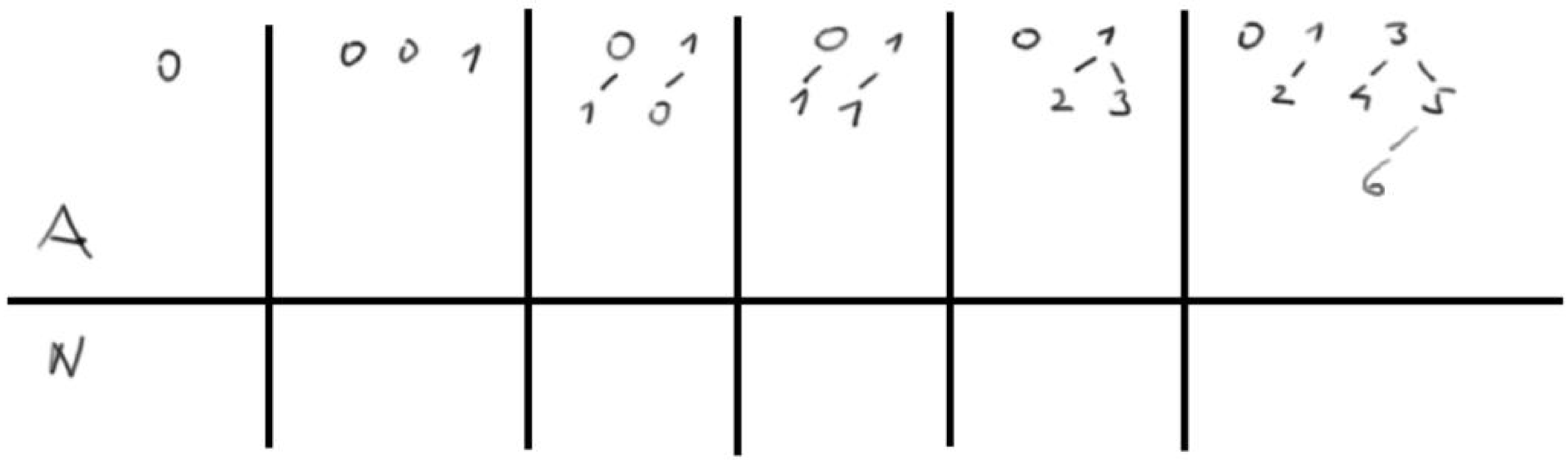
DECREASEKEY(20, 20)



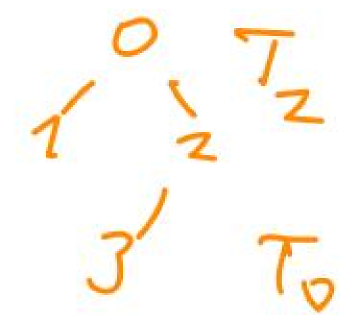
Co o kolik

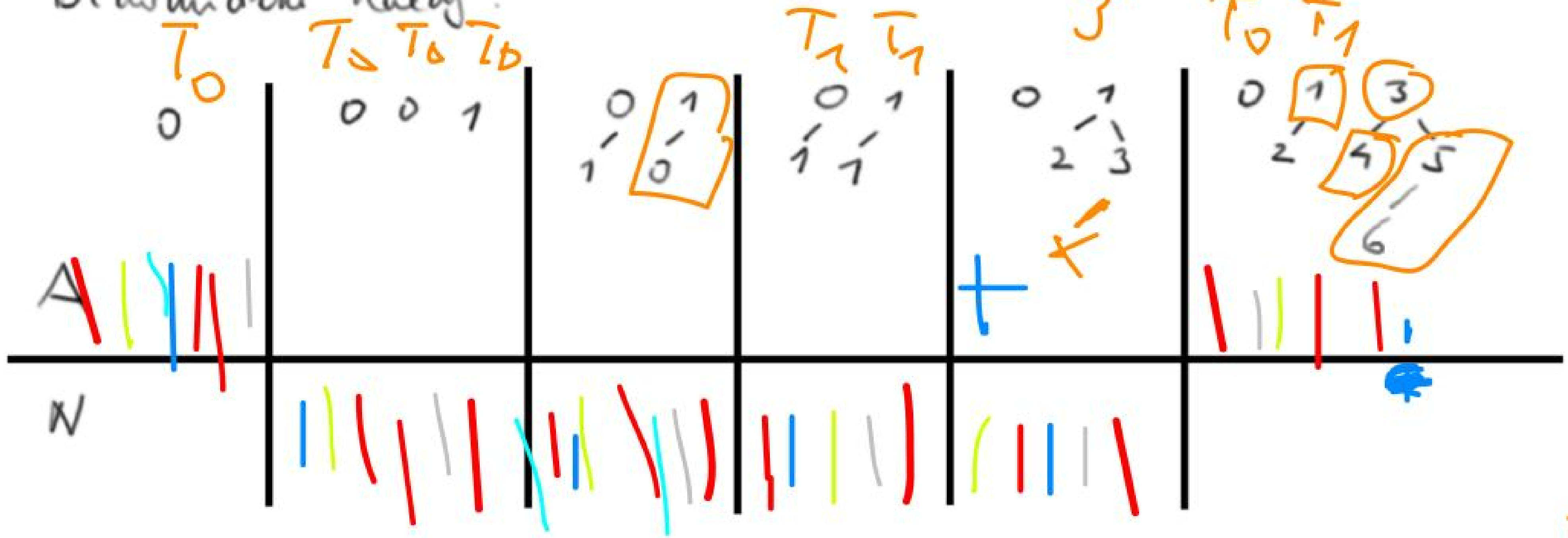
DECREASEKEY(20, 20)

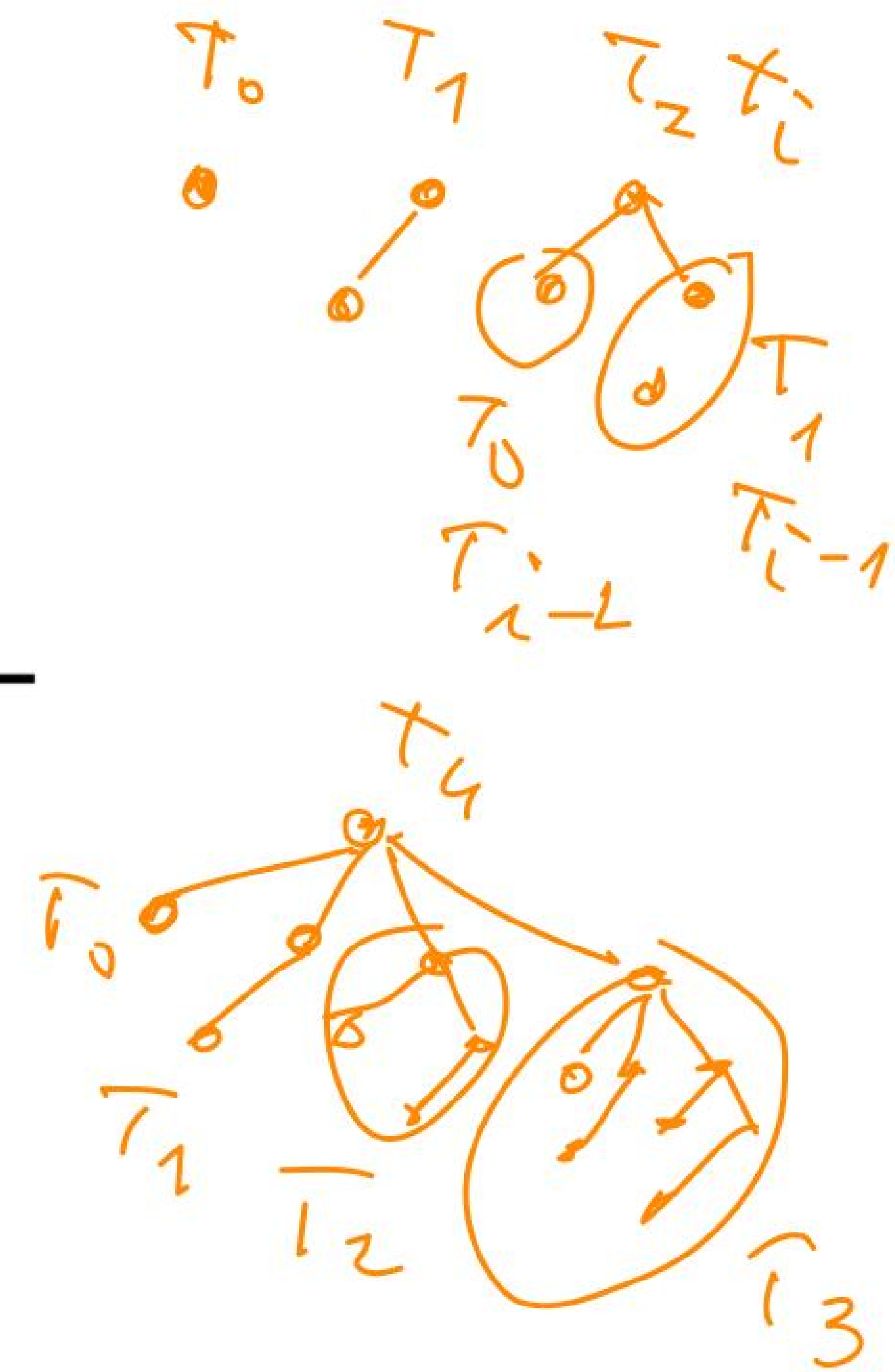
Binomiální haldy?



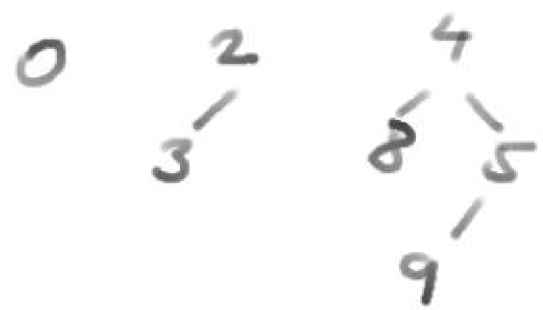
Binomiální haldy?

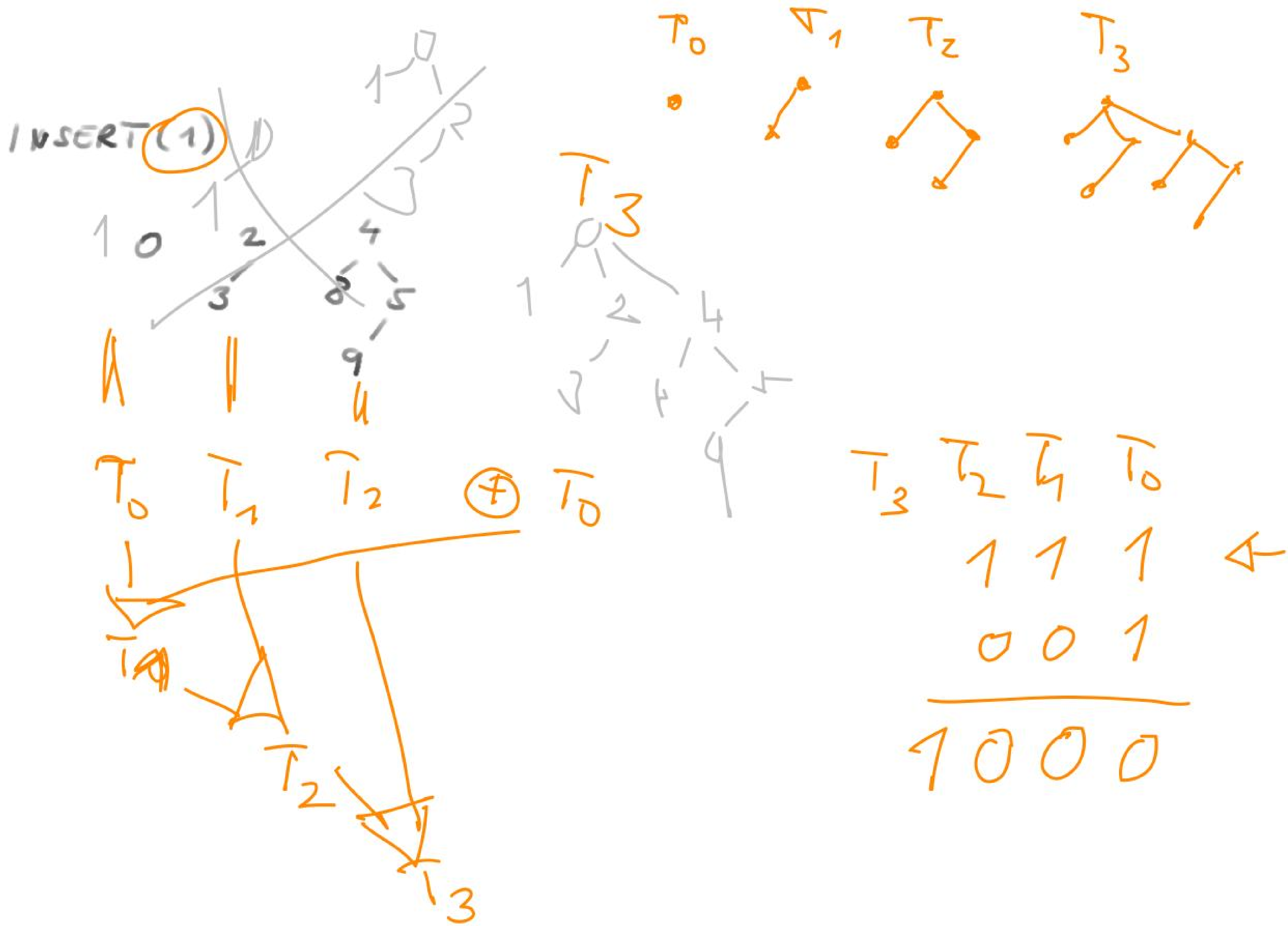




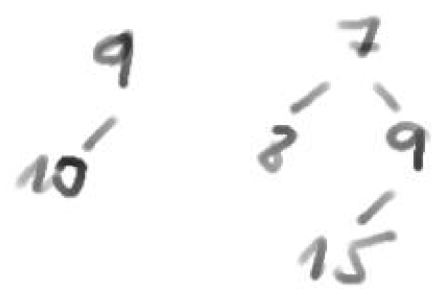


INSERT(1)

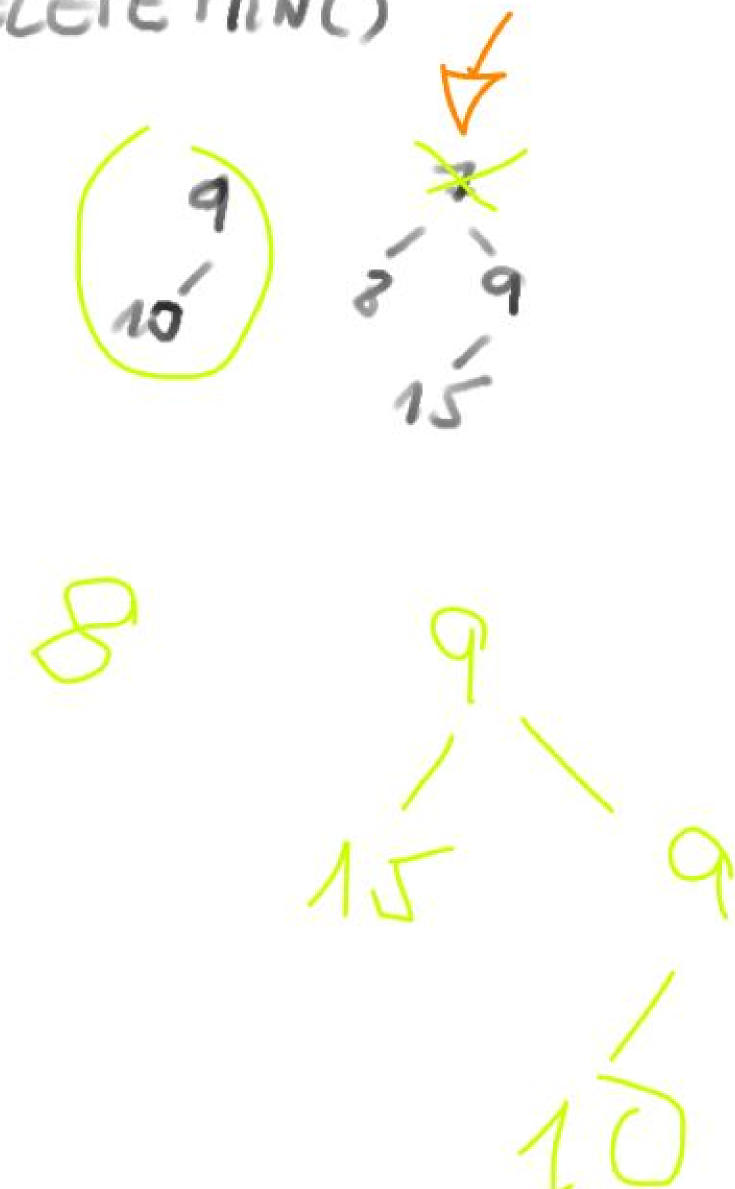



INSERT(1)
$T_0$ $T_1$ $T_2$ $T_3$
$T_3$
$T_0$ $T_1$ $T_2$ ⊕ $T_0$
$T_1$
$T_2$
$T_3$
$T_3$ $T_2$ $T_1$ $T_0$
1 1 1
0 0 1
1000

DELETEMIN()

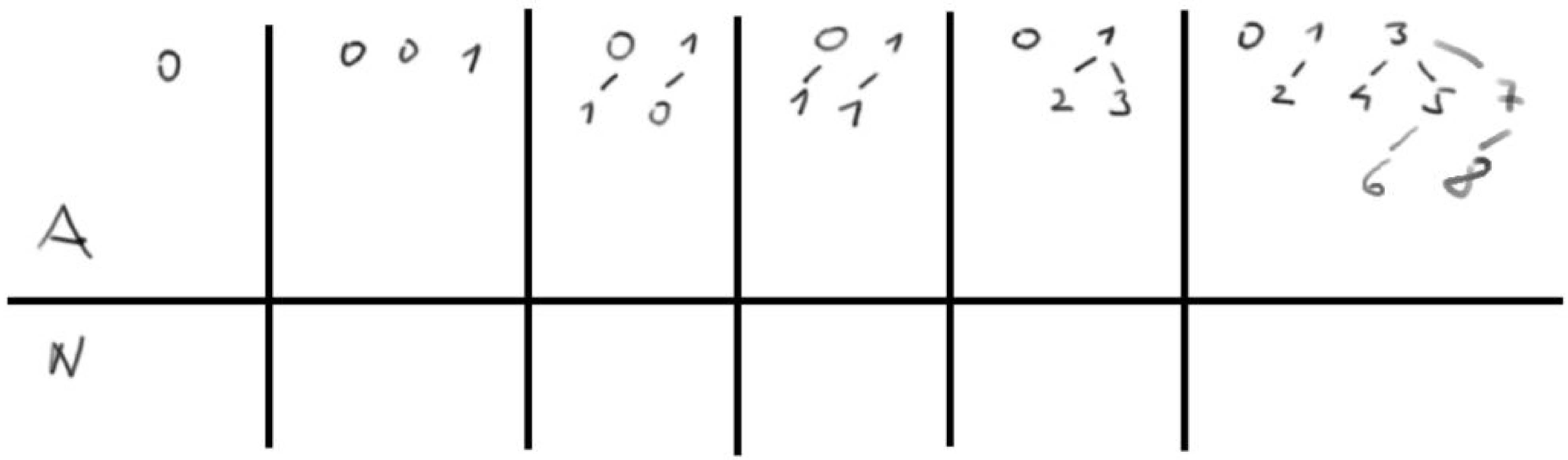


DELETE MIN()

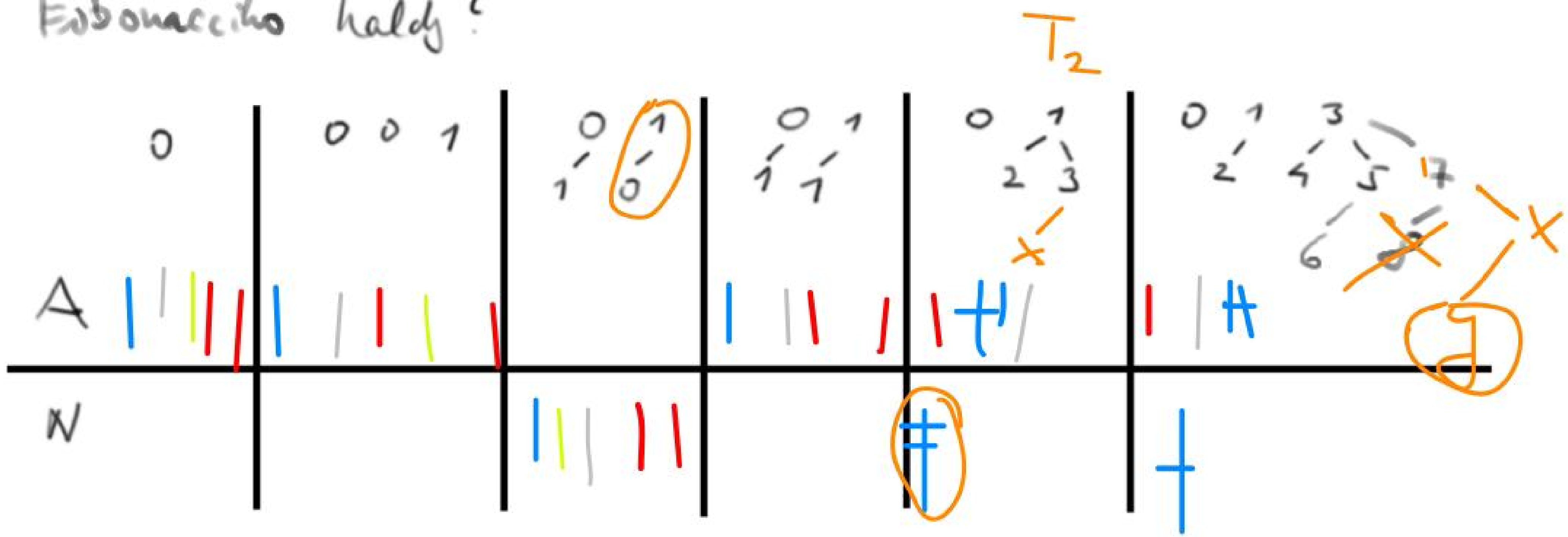



| $T_2$ | $T_1$ | $T_0$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | | 1 |

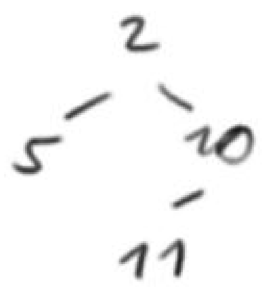
Fibonacciho haldy?



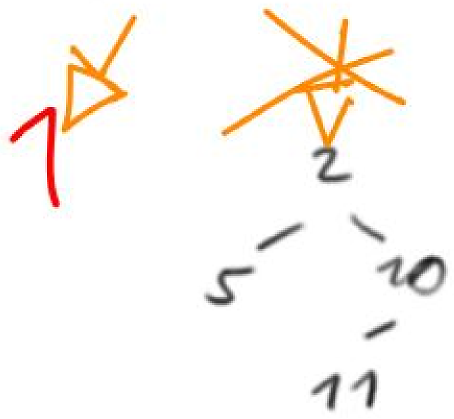
Fibonacciho haldy?



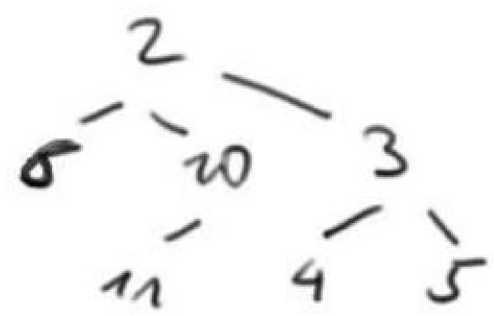
INSERT (1)



INSERT (1)



DECREASEKEY(5,3) a DECREASEKEY(4,2)



DECREASEKEY(5,3) a DECREASEKEY(4,2)

# Př. 4/1: binární halda

Z binární haldy obsahující $n^3$ prvků, jejíž kořen obsahuje nejmenší hodnotu z celé haldy, odstraníme $n^2lg(n)$ nejmenších prvků. Jaká je asymptotická složitost této akce? Bude složitost jiná, pokud halda nebude binární ale binomiální?

# Př. 4/1: binární halda

Z binární haldy obsahující $n^3$ prvků, jejíž kořen obsahuje nejmenší hodnotu z celé haldy, odstraníme $n^2 lg(n)$ nejmenších prvků. Jaká je asymptotická složitost této akce? Bude složitost jiná, pokud halda nebude binární ale binomiální?

$n^2 \log^2(n)$

$n^2 \lg n \cdot \underbrace{\lg(n^3)}_{3\lg(n)}$

$O(n^2 \lg^2(n))$

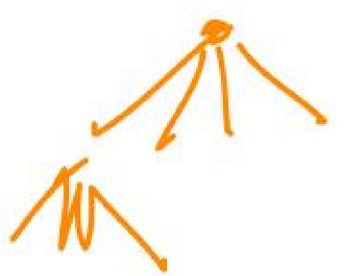
| | | | |
|---|---|---|---|
| Yes | 7 | | 100% |
| No | 0 | 34/54 | 0% |

# Př. 4/2: d-ární halda

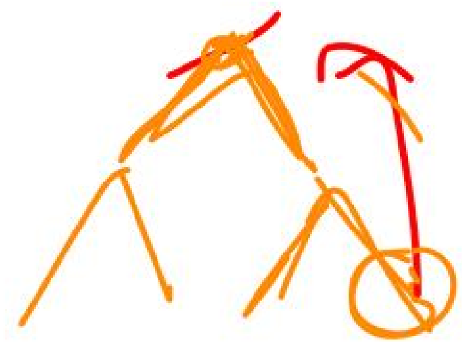
Je dána d-ární halda s hloubkou $h$, jejíž všechny listy leží ve stejné hloubce. Jaký je maximální možný a jaký je minimální možný počet porovnání dvou klíčů když v této haldě provedeme operaci deleteMin?

# Př. 4/2: d-ární halda

Je dána d-ární halda s hloubkou $h$, jejíž všechny listy leží ve stejné hloubce. Jaký je maximální možný a jaký je minimální možný počet porovnání dvou klíčů když v této haldě provedeme operaci deleteMin?



$h = 2$



$d \cdot h$ max.

$d$ min.

# Př. 4/3: binomiální halda

Jaký je nejvyšší možný stupeň uzlu (stupeň = počet synů) v binomiální haldě s N klíči?

# Př. 4/4: reprezentace binomiální haldy

Uzel v binomiální haldě může mít stupeň (= počet synů) vyšší než dva a obecně stupeň uzlu není shora omezen. Uzel odkazuje na další binomiální stromy. Máme dvě možnosti: a) Odkazy jsou uspořádány v rostoucím pořadí velikostí podstromů, na které odkazují, b) odkazy jsou řazeny náhodně. Rozhodněte, jestli volba možností a), b) ovlivňuje rychlost implementace operací Insert, DeleteMin.

# Př. 4/5: Fibonacciho halda

Do nejprve prázdné Fibonacciho haldy vložíme $2^n + 5$ navzájem různých klíčů ($n > 2$). Poté v haldě provedeme operaci DeleteMin včetně následující konzolidace haldy. Žádné jiné operace s haldou neprovádíme. Kolik binomiálních stromů s kořenem v kořenovém seznamu haldy bude halda obsahovat po této akci?

# Př. 4/5: Fibonacciho halda

Do nejprve prázdné Fibonacciho haldy vložíme $2^n + 5$ navzájem různých klíčů ($n > 2$). Poté v haldě provedeme operaci DeleteMin včetně následující konzolidace haldy. Žádné jiné operace s haldou neprovádíme. Kolik binomiálních stromů s kořenem v kořenovém seznamu haldy bude halda obsahovat po této akci?