Welcome To BigBlueButton

BigBlueButton is an open source web conferencing system designed for online learning

CHAT

Send public and private messages.

WEBCAMS

Hold visual meetings.

AUDIO

Communicate using high quality audio.

EMOJIS

Express yourself.

BREAKOUT ROOMS

Group users into breakout rooms for team collaboration.

POLLING

Poll your users anytime.

SCREEN SHARING

Share your screen.

MULTI-USER WHITEBOARD

Draw together.

For more information visit [bigbluebutton.org →](https://bigbluebutton.org)

Datové struktury a algoritmy

Část 11

Vyhledávání, zejména rozptylování

Petr Felkel

11.12.2020

Topics

Vyhledávání

Rozptylování (hashing)

- Rozptylovací funkce
- Řešení kolizí
  - Zřetězené rozptylování
  - Otevřené rozptylování
    - Linear Probing
    - Double hashing

Topics

Vyhledávání

Rozptylování (hashing)

- Rozptylovací funkce
- Řešení kolizí
  - Zřetězené rozptylování
  - Otevřené rozptylování
    - Linear Probing
    - Double hashing

Topics

Vyhledávání

Rozptylování (hashing)

- Rozptylovací funkce
- Řešení kolizí
  - Zřetězené rozptylování
  - Otevřené rozptylování
    - Linear Probing
    - Double hashing

Topics

Vyhledávání

Rozptylování (hashing)

- Rozptylovací funkce
- Řešení kolizí
  - Zřetězené rozptylování
  - Otevřené rozptylování
    - Linear Probing
    - Double hashing

Slovník - Dictionary

Řada aplikací potřebuje

- dynamickou množinu
- s operacemi: Search, Insert, Delete

= slovník

Př. Tabulka symbolů překladače

identifikátor	**typ**	**adresa**
`suma`	`int`	`0xFFFFDC09`
...	...	...

Vyhledávání

Porovnáváním klíčů $\Omega(\log n)$

- Nalezeno, když klíč_prvku = hledaný klíč
- např. sekvenční vyhledávání, BVS,...

asociativní

Indexováním klíčem (přímý přístup) $\Theta(1)$

- klíč je přímo indexem (adresou)
- rozsah klíčů ~ rozsahu indexů

Rozptylováním **průměrně** $\Theta(1)$

- výpočtem adresy z hodnoty klíče

adresní vyhledávání

Vyhledávání

asociativní

Porovnáváním klíčů — **$\Omega(\log n)$**

– Nalezeno, když klíč_prvku = hledaný klíč
– např. sekvenční vyhledávání, BVS,...

adresní vyhledávání

Indexováním klíčem (přímý přístup) — **$\Theta(1)$**

– klíč je přímo indexem (adresou)
– rozsah klíčů ~ rozsahu indexů

Rozptylováním — **průměrně $\Theta(1)$**

– výpočtem adresy z hodnoty klíče

Rozptylování - Hashing

= kompromis mezi rychlostí a spotřebou paměti

- ∞ času - sekvenční vyhledávání
- ∞ paměti - přímý přístup (indexování klíčem)
- málo času i paměti
  - hashing
  - velikost tabulky reguluje čas vyhledání

Rozptylování - Hashing

= kompromis mezi rychlostí a spotřebou paměti

- ∞ času - sekvenční vyhledávání
- ∞ paměti - přímý přístup (indexování klíčem)
- málo času i paměti
  - hashing
  - velikost tabulky reguluje čas vyhledání

Rozptylování - Hashing

Konstantní očekávaný čas pro *vyhledání* a *vkládání* (*search* and *insert)* !!!

Něco za něco:

– čas provádění ~ délce klíče

– není vhodné pro operace *výběru podmnožiny* a *řazení* (*select* a *sort)*

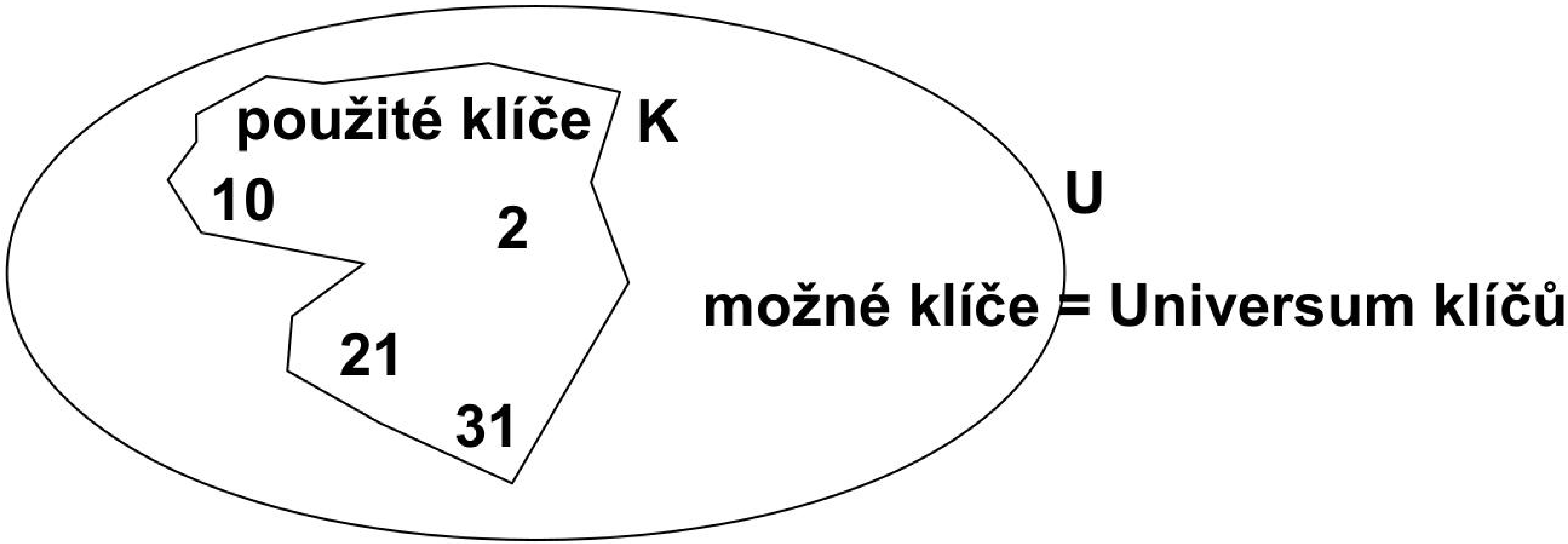
Rozptylování - Hashing

Konstantní očekávaný čas pro *vyhledání* a *vkládání* (*search* and *insert*) !!!

Něco za něco:

- čas provádění ~ délce klíče
- není vhodné pro operace *výběru podmnožiny* a *řazení* (*select* a *sort*)

Rozptylování

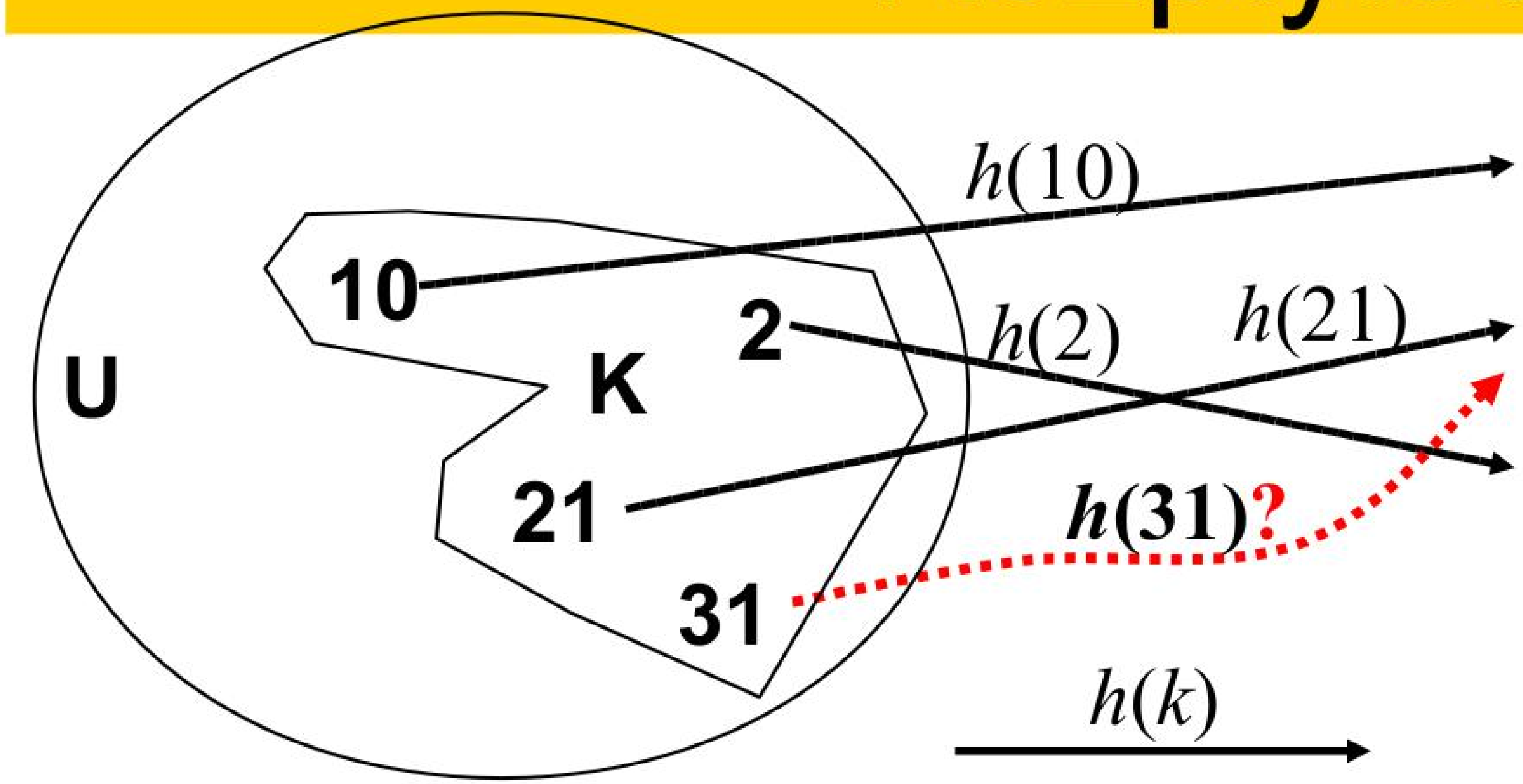


Rozptylování vhodné pro |K| << |U|

K množina použitých klíčů

U universum klíčů

Rozptylování



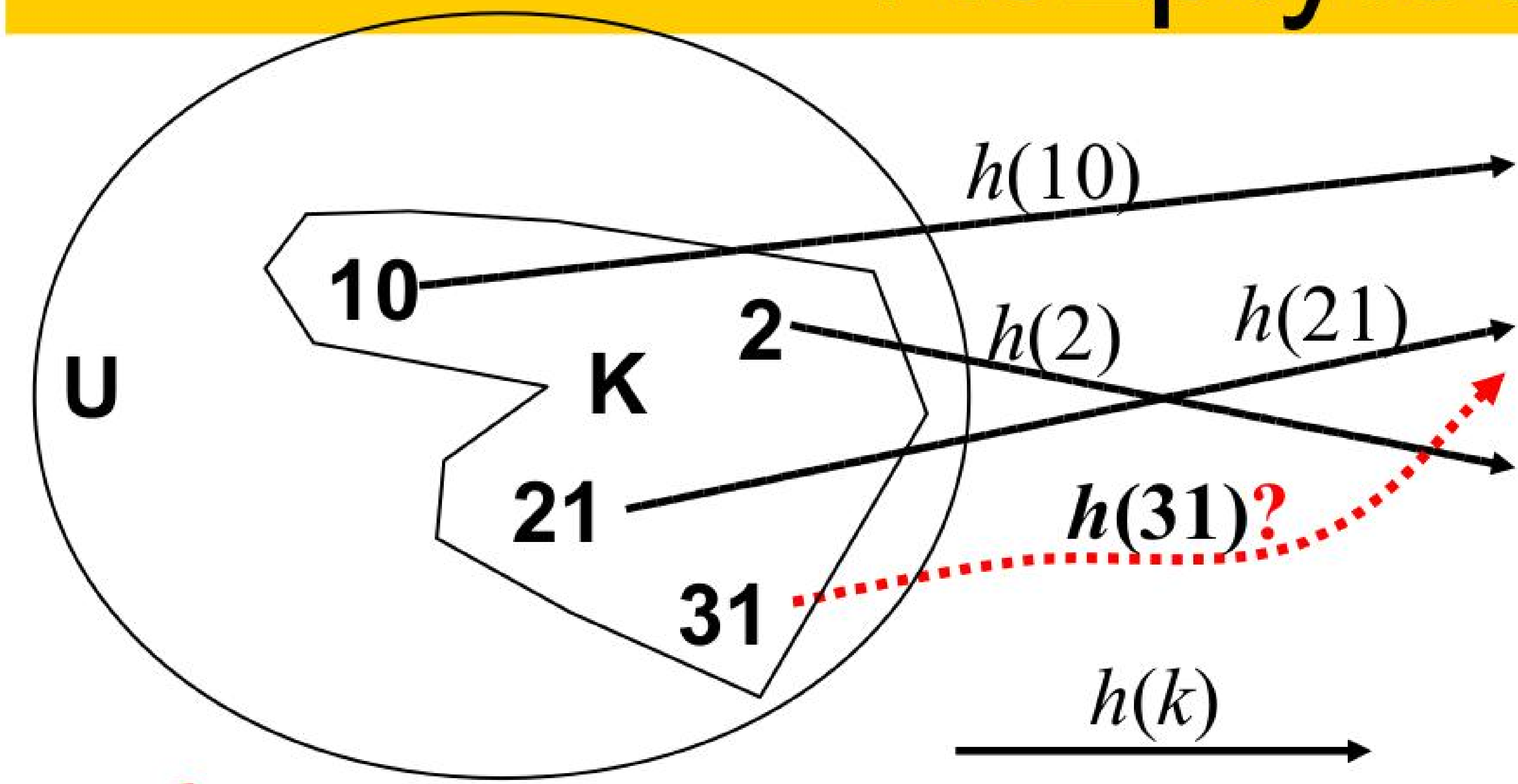
0	10
1	21
2	2
...	
M-1	

Dvě fáze

1. Výpočet rozptylovací funkce *h*(*k*)
   (*h*(*k*) vypočítá adresu z hodnoty klíče)
2. Vyřešení kolizí

h(31) ..... kolize: index 1 již obsazen

Rozptylování



0	**10**
1	**21**
2	**2**
...	
M-1	

Dvě fáze

1. Výpočet rozptylovací funkce $h(k)$
   ($h(k)$ vypočítá adresu z hodnoty klíče)
2. Vyřešení kolizí

   $h(31)$ ..... kolize: index 1 již obsazen

1. Výpočet rozptylovací funkce $h(k)$

Rozptylovací funkce $h(k)$

Zobrazuje

množinu klíčů $K \in U$

do intervalu adres $A = <a_{min}, a_{max}>$, *obvykle* $<0, M-1>$

$|U| >> |K| \cong |A|$

($h(k)$ Vypočítá adresu z hodnoty klíče)

Synonyma: $k_1 \neq k_2$, $\mathrm{h}(k_1) = \mathrm{h}(k_2)$

= kolize

Rozptylovací funkce $h(k)$

Zobrazuje

množinu klíčů $K \in U$

do intervalu adres $A = \langle a_{min}, a_{max} \rangle$, *obvykle* $\langle 0, M-1 \rangle$

$|U| >> |K| \cong |A|$

($h(k)$ Vypočítá adresu z hodnoty klíče)

Synonyma: $k_1 \neq k_2$, $\mathrm{h}(k_1) = \mathrm{h}(k_2)$

= kolize

Rozptylovací funkce *h*(*k*)

Je silně závislá na vlastnostech klíčů a jejich reprezentaci v paměti

Ideálně:

- výpočetně co nejjednodušší (rychlá)
- aproximuje náhodnou funkci
- využije rovnoměrně adresní prostor
- generuje minimum kolizí
- proto: využívá všechny složky klíče

Rozptylovací funkce *h*(*k*)

Je silně závislá na vlastnostech klíčů a jejich reprezentaci v paměti

Ideálně:

- výpočetně co nejjednodušší (rychlá)
- aproximuje náhodnou funkci
- využije rovnoměrně adresní prostor
- generuje minimum kolizí
- proto: využívá všechny složky klíče

Rozptylovací funkce *h*(*k*) - příklady

Příklady fce *h*(*k*) pro různé typy klíčů

- reálná čísla
- celá čísla
- bitová
- řetězce

Chybná rozptylovací funkce

Rozptylovací funkce $h(k)$ - příklady

Příklady fce $h(k)$ pro různé typy klíčů

- reálná čísla
- celá čísla
- bitová
- řetězce

Chybná rozptylovací funkce

Rozptylovací funkce *h*(*k*)-příklady

Pro reálná čísla z intervalu <0, 1>

– multiplikativní: **h(k,M) = round(k * M)**

neoddělí shluky blízkých čísel (s rozdílem < 1/**M**)

M = velikost tabulky (table size)

Rozptylovací funkce *h*(*k*)-příklady

Pro reálná čísla z intervalu <0, 1>

– multiplikativní: **h(k,M) = round(k * M)**

neoddělí shluky blízkých čísel (s rozdílem < 1/**M**)

M = velikost tabulky (table size)

Rozptylovací funkce *h*(*k*)-příklady

Pro celá čísla

- multiplikativní: (kde M je prvočíslo, klíče mají w bitů)
  - **$h(k,M) = round(k / 2^w * M)$**
- modulární:
  - **h(k,M) = k % M**
- kombinovaná:
  - **h(k,M) = round(c * k) % M, c $\in$<0,1>**
  - **h(k,M) = (int)(0.616161 * k) % M**
  - **h(k,M) = (16161 * k) % M** // pozor na přetečení

Rozptylovací funkce *h*(*k*)-příklady

Pro celá čísla

- multiplikativní: (kde M je prvočíslo, klíče mají w bitů)
  - **h(k,M) = round(k /2^{w} * M)**
- modulární:
  - **h(k,M) = k % M**
- kombinovaná:
  - **h(k,M) = round(c * k) % M, c ∈<0,1>**
  - **h(k,M) = (int)(0.616161 * k) % M**
  - **h(k,M) = (16161 * k) % M** // pozor na přetečení

Rozptylovací funkce *h*(*k*)-příklady Hash functions *h*(*k*) - examples

Rychlá, silně závislá na reprezentaci klíčů

h(k) = k & (M-1) **kde** **M = 2^x (není prvočíslo) ,**

& je bitový součin

je totéž jako

h(k) = k % M, tj.použije **x** nejnižších bitů klíče

Rozptylovací funkce *h*(*k*)-příklady Hash functions *h*(*k*) - examples

Rychlá, silně závislá na reprezentaci klíčů

h(k) = k & (M-1) **kde M = 2^x (není prvočíslo) ,**

& je bitový součin

je totéž jako

h(k) = k % M, tj.použije **x** nejnižších bitů klíče

Rozptylovací funkce $h(k)$-příklady

Pro řetězce *(for strings)*:

```
int hash( char *k, int M )  {
int h = 0, a = 127;
    for( ; *k != 0; k++ )
     h = ( a * h + *k ) % M;
    return h;
}
```

Hornerovo schéma :

$$P(a) = k_4 * a^4 + k_3 * a^3 + k_2 * a^2 + k_1 * a^1 + k_0 * a^0$$

$$= (((k_4 * a + k_3) * a + k_2) * a + k_1) * a + k_0$$

Výpočet hodnoty polynomu P v bodě a, koeficienty P jsou jednotlivé znaky (jejich číselná hodnota) v řetězci `*k`.

Rozptylovací funkce $h(k)$-příklady

Pro řetězce *(for strings):*

```
int hash( char *k, int M )  {
int h = 0, a = 127;
    for( ; *k != 0; k++ )
     h = ( a * h + *k ) % M;
    return h;
}
```

Hornerovo schéma :

$$P(a) = k_4 * a^4 + k_3 * a^3 + k_2 * a^2 + k_1 * a^1 + k_0 * a^0$$

$$= (((k_4 * a + k_3) * a + k_2) * a + k_1) * a + k_0$$

Výpočet hodnoty polynomu P v bodě a, koeficienty P jsou jednotlivé znaky (jejich číselná hodnota) v řetězci **`*k`**.

Rozptylovací funkce *h*(*k*)-příklady

Pro řetězce *(for strings) Java:*

```
public int hashCode( String s, int M ) {
      int h = 0;
      for( int i = 0; i < s.length(); i++ )

           h = 31 * h + s.charAt(i);
      return h;
 }
```

Hodnota konstant 127, 31 přispívá rovnoměrnému psoudonáhodnému rozptýlení.

Rozptylovací funkce *h*(*k*)-příklady

Pro řetězce *(for strings) Java:*

```
public int hashCode( String s, int M ) {
      int h = 0;
      for( int i = 0; i < s.length(); i++ )
           h = 31 * h + s.charAt(i);
      return h;
}
```

Hodnota konstant 127, 31 přispívá rovnoměrnému psoudonáhodnému rozptýlení.

Rozptylovací funkce *h*(*k*)-příklady

Pro řetězce: (pseudo-) randomizovaná

```
int hash( char *k, int M )
{   int h = 0, a = 31415; b = 27183;
    for( ; *k != 0; k++, a = a*b % (M-1) )
        h = ( a * h + *k ) % M;
    return h;
}
```

Rozptylovací funkce *h*(*k*)-příklady

Pro řetězce: (pseudo-) randomizovaná

```
int hash( char *k, int M )
{   int h = 0, a = 31415; b = 27183;
    for( ; *k != 0; k++, a = a*b % (M-1) )
        h = ( a * h + *k ) % M;
    return h;
}
```

Rozptylovací funkce *h*(*k*)-chyba

Častá chyba:

funkce *vrací stále nebo většinou stejnou hodnotu*

– chyba v konverzi typů

– funguje, ale vrací blízké adresy

– proto generuje hodně kolizí

=> *aplikace je extrémně pomalá, řešení kolizí zdržuje.*

Rozptylovací funkce *h*(*k*)-chyba

Častá chyba:

funkce *vrací stále nebo většinou stejnou hodnotu*

- chyba v konverzi typů
- funguje, ale vrací blízké adresy
- proto generuje hodně kolizí

=> *aplikace je extrémně pomalá, řešení kolizí zdržuje.*

Shrnutí

Rozptylovací funkce h(k)

- počítá adresu z hodnoty klíče

Rozptylovací funkce $h(k)$

Každá hashovací funkce má slabá místa, kdy pro různé klíče dává stejnou adresu

Univerzální hashování

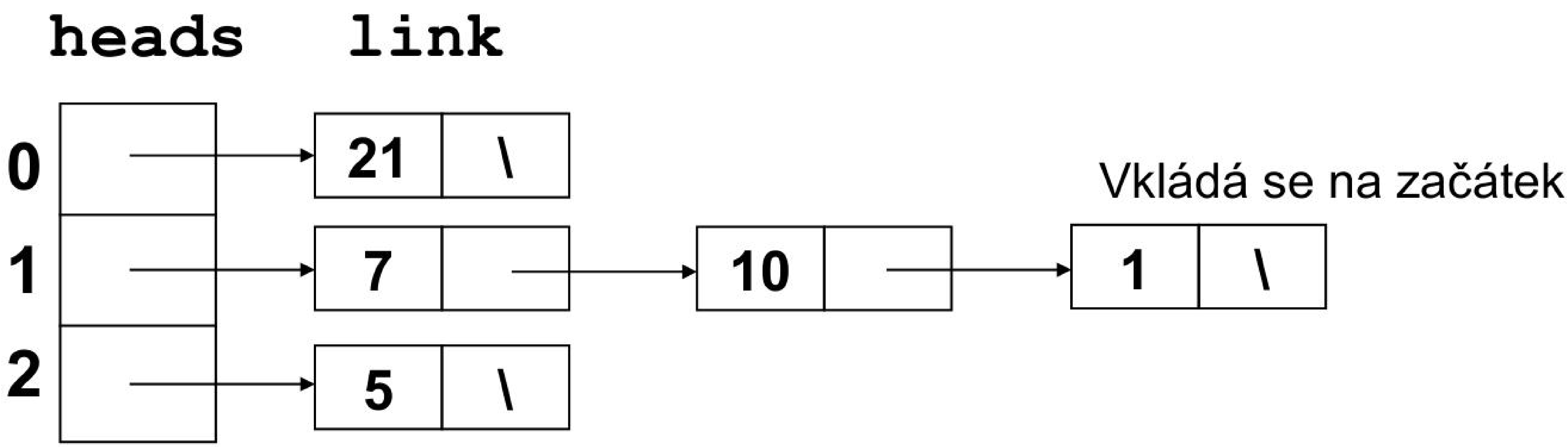
- Místo jedné hashovací funkce $h(k)$ máme konečnou množinu $\boldsymbol{H}$ funkcí mapujících U do intervalu $\{0, 1, \ldots, m-1\}$
- Při spuštění programu jednu náhodně zvolíme
- Tato množina je univerzální, pokud pro různé klíče $x, y \in U$ vrací stejnou adresu $h(x) = h(y)$ přesně v $|\boldsymbol{H}|/m$ případech
- Pravděpodobnost kolize při náhodném výběru funkce $h(k)$ je tedy přesně $1/m$

2. Vyřešení kolizí

a) Zřetězené rozptylování 1/5 Chaining

$h(k) = k \bmod 3$

posloupnost : 1, 5, 21, 10, 7

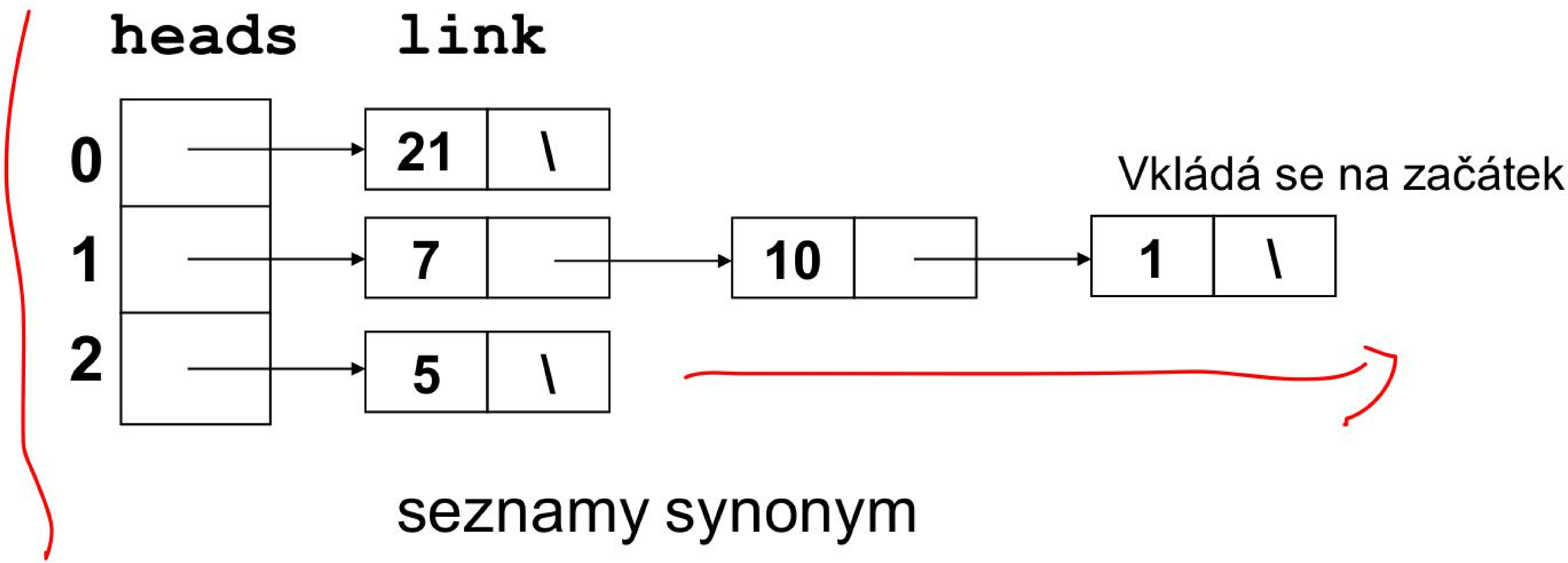


seznamy synonym

a) Zřetězené rozptylování 1/5
Chaining

$h(k) = k \bmod 3$

posloupnost : 1, 5, 21, 10, 7



a) Zřetězené rozptylování 2/5

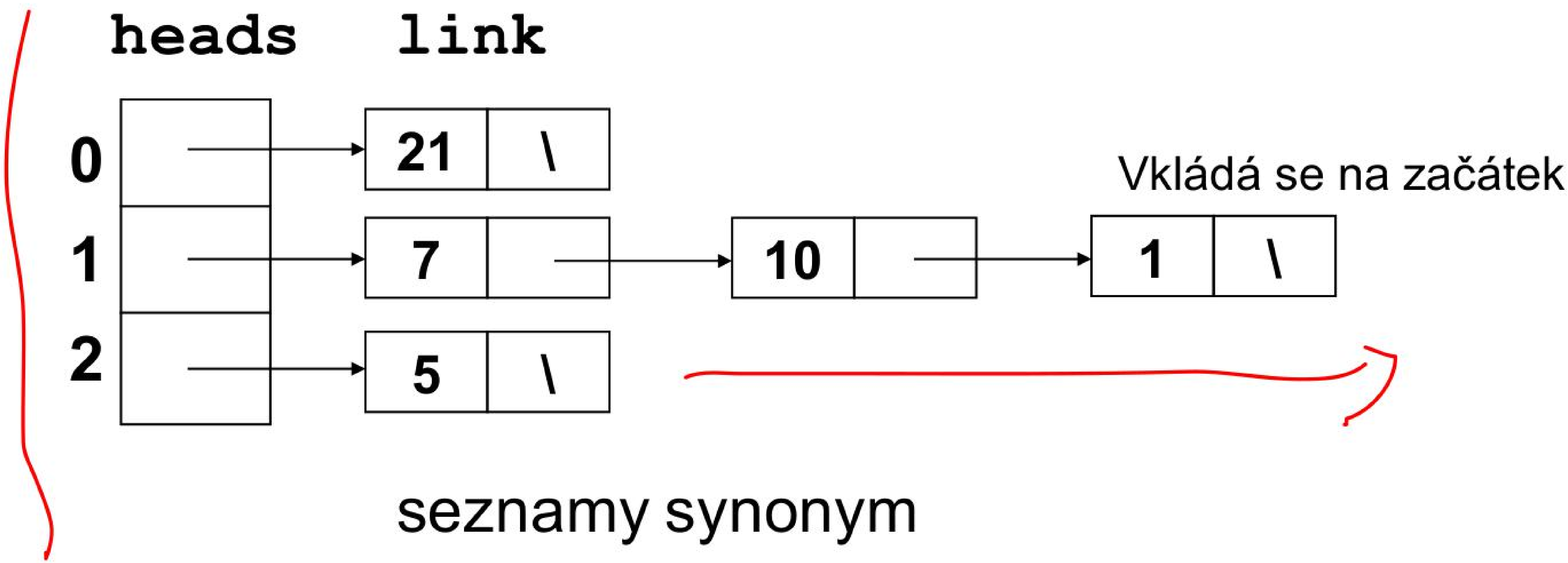
```
private:
  link* heads; int N,M;   [Sedgewick]

public:
  init( int maxN )            // initialization
  {
    N=0;                      // No. of nodes
    M = maxN / 5;             // table size
    heads = new link[M]; // table with pointers
    for( int i = 0; i < M; i++ )
        heads[i] = null;
  }
  ...
```

a) Zřetězené rozptylování 1/5
Chaining

$h(k) = k \bmod 3$

posloupnost : 1, 5, 21, 10, 7

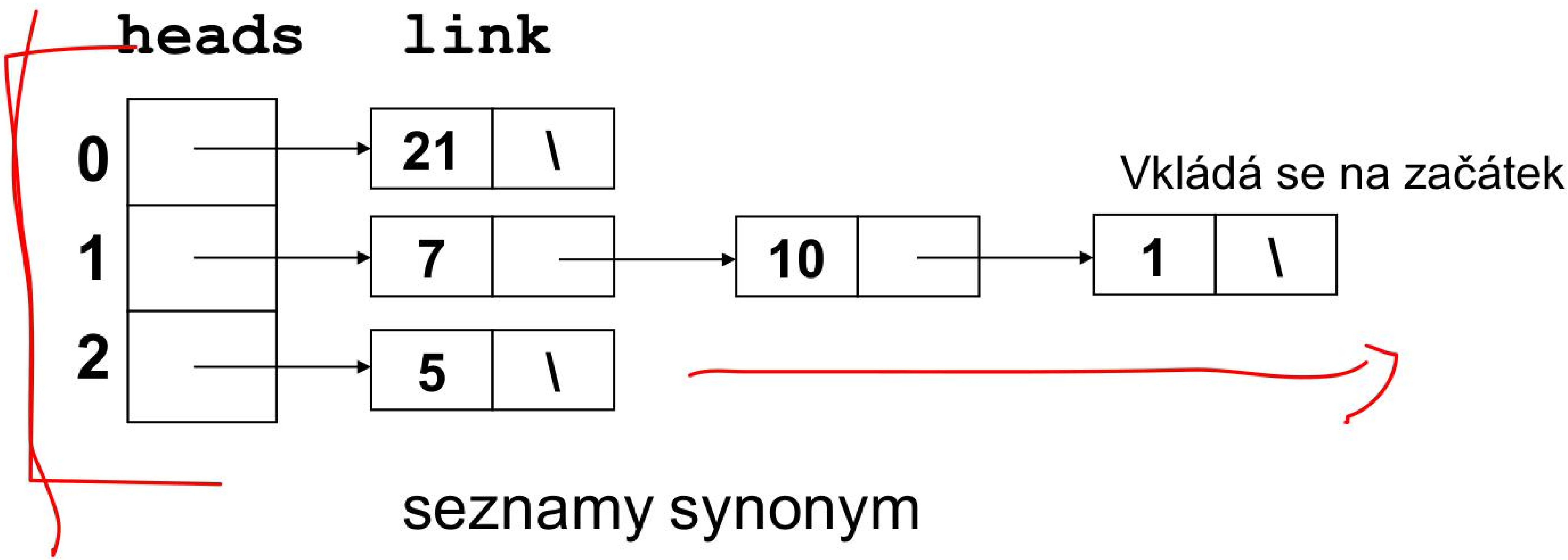


seznamy synonym

a) Zřetězené rozptylování 1/5 Chaining

$h(k) = k \bmod 3$

posloupnost : 1, 5, 21, 10, 7



seznamy synonym

a) Zřetězené rozptylování 2/5

```
private:
  link* heads; int N,M;   [Sedgewick]

public:
  init( int maxN )          // initialization
  {
    N=0;                    // No. of nodes
    M = maxN / 5;           // table size
    heads = new link[M];    // table with pointers
    for( int i = 0; i < M; i++ )
       heads[i] = null;
  }
  ...
```

a) Zřetězené rozptylování 3/5

```
Item search( Key k )
{
  return searchList( heads[hash(k, M)], k );
}

void insert( Item item )                // Vkládá se na začátek
{
  int i = hash( item.key(), M );
  heads[i] = new node( item, heads[i] );
  N++;
}
```

a) Zřetězené rozptylování 4/5

n **= počet prvků,** ***m*** **= velikost tabulky, m<n.**

Řetěz synonym má ideálně délku α ***=n/m,*** α **>1 (plnění tabulky)**

velmi nepravděpodobný extrém

Insert $I(n) = t_{hash} + t_{link} = O(1)$

Search $Q(n) = t_{hash} + t_{search}$ **průměrně**

$= t_{hash} + t_c{}^* n/(2m) = O(n) \qquad O(1 + \alpha)$

Delete $D(n) = t_{hash} + t_{search} + t_{link} = O(n) \qquad O(1 + \alpha)$

pro malá α **(velká** ***m*****) se hodně blíží O(1) !!!**

pro velká α **(malá** ***m*****)** ***m*****-násobné zrychlení vůči sekvenčnímu hledání.**

a) Zřetězené rozptylování 4/5

n = počet prvků, m = velikost tabulky, m<n.

Řetěz synonym má ideálně délku $\alpha = n/m$, $\boxed{\alpha}$ >1 (plnění tabulky)

velmi nepravděpodobný

extrém

			průměrně
Insert	$I(n) = t_{hash} + t_{link} = O(1)$		
Search	$Q(n) = t_{hash} + t_{search}$		
	$= t_{hash} + t_c{}^* \, n/(2m)$	$= O(n)$	$O(1 + \alpha)$
Delete	$D(n) = t_{hash} + t_{search} + t_{link}$	$= O(n)$	$O(1 + \alpha)$

pro malá α (velká m) se hodně blíží O(1) !!!

pro velká α (malá m) m-násobné zrychlení vůči sekvenčnímu hledání.

a) Zřetězené rozptylování 5/5

Praxe: volit m = n/5 až n/10 => plnění α = 10 prvků / řetěz

- vyplatí se hledání sekvenčně (je krátké)
- neplýtvá nepoužitými ukazateli

Shrnutí:

+ nemusíme znát n předem

– potřebuje dynamické přidělování paměti

– potřebuje paměť na ukazatele a na tabulku[m]

a) Zřetězené rozptylování 5/5

Praxe: volit $m = n/5$ až $n/10$ => plnění α = 10 prvků / řetěz

- vyplatí se hledání sekvenčně (je krátké)
- neplýtvá nepoužitými ukazateli

Shrnutí:

+ nemusíme znát n předem

– potřebuje dynamické přidělování paměti

– potřebuje paměť na ukazatele a na tabulku[m]

b) Otevřené rozptylování (open-address hashing)

Známe předem počet prvků (odhad)

nechceme ukazatele (v prvcích ani tabulku)

=> posloupnost do pole

Podle tvaru hashovací funkce $h(k)$ při kolizi:

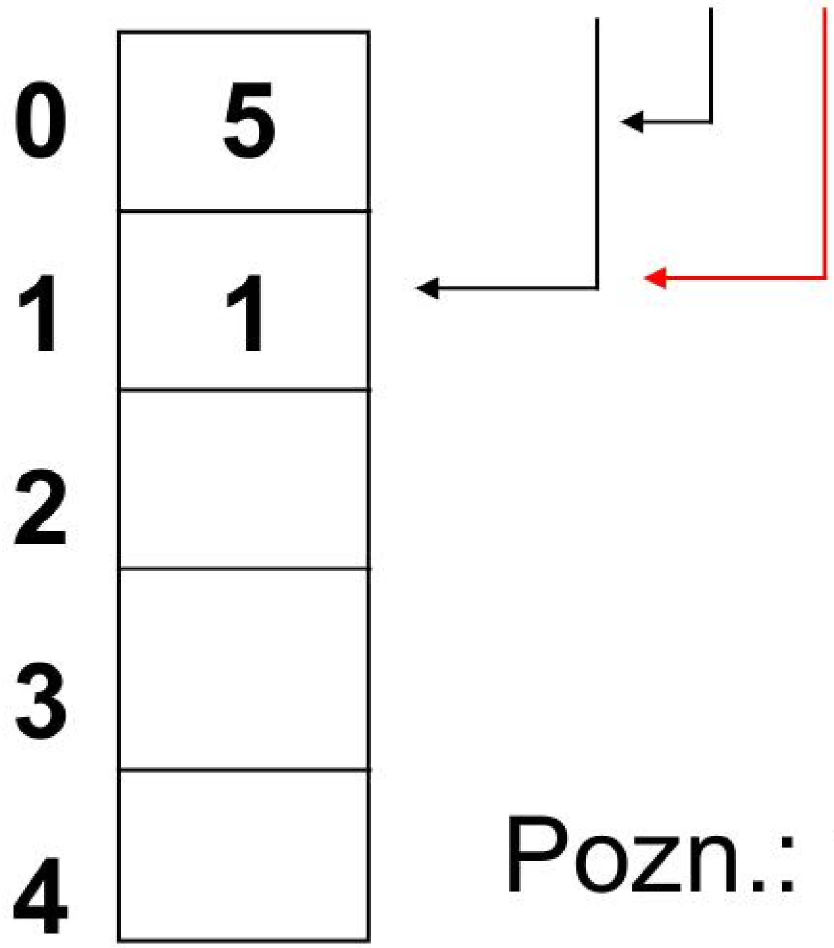
1. lineární prohledávání (linear probing)
2. dvojí rozptylování (double hashing)

0	**5**
1	**1**
2	**21**
3	**10**
4	

b) Otevřené rozptylování

$h(k) = k \bmod 5$ ($h(k) = k \bmod m$, m je rozměr pole)

posloupnost: 1, 5, 21, 10, 7



Problém:

kolize - 1 blokuje místo pro 21

1. linear probing
2. double hashing

Pozn.: 1 a 21 jsou synonyma

často ale blokuje nesynonymum.

Kolize je blokování libovolným klíčem

Test - Probe

= určení, zda pozice v tabulce obsahuje klíč shodný s hledaným klíčem

- search hit = klíč nalezen
- search miss = pozice prázdná, klíč nenalezen
- Jinak = na pozici je jiný klíč, hledej dál

Test - Probe

= určení, zda pozice v tabulce obsahuje klíč shodný s hledaným klíčem

- search hit = klíč nalezen
- search miss = pozice prázdná, klíč nenalezen
- Jinak = na pozici je jiný klíč, hledej dál

b) Otevřené rozptylování
(open-addressing hashing)

Metoda řešení kolizí
(solution of collisions)

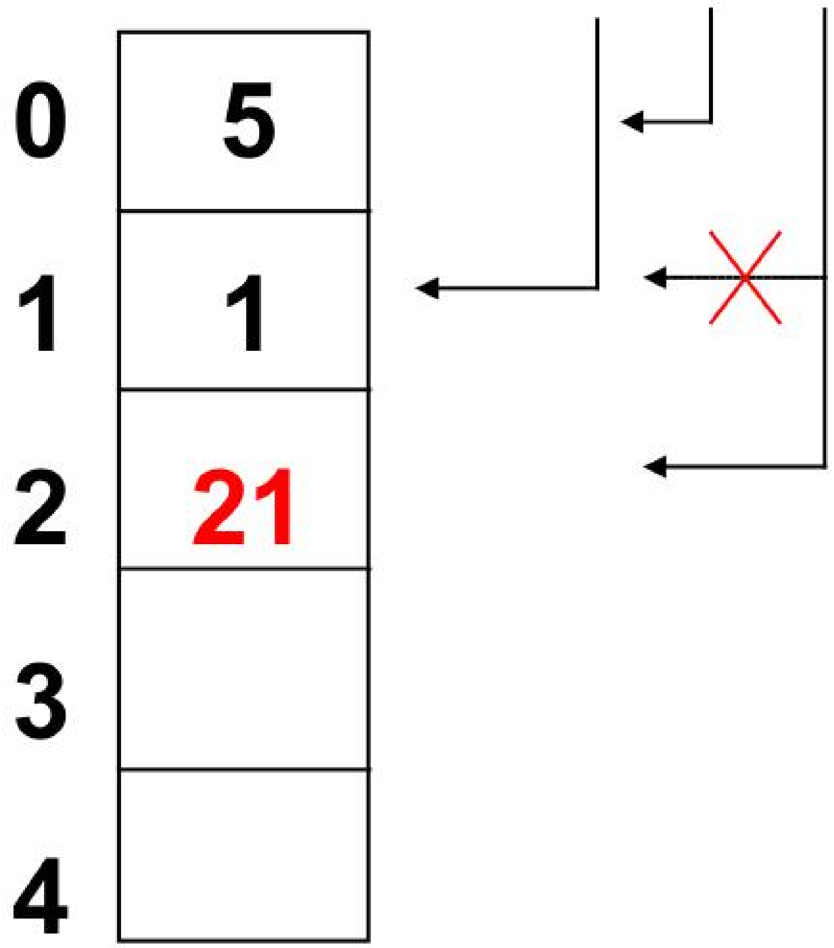
b1) Linear probing
Lineární prohledávání

b2) Double hashing
Dvojí rozptylování

b1) Linear probing

$h(k)$ = [(k mod 5) + i] mod 5 = (k + i) mod 5; i = 0;

posloupnost: 1, 5, 21, 10, 7



kolize - 1 blokuje

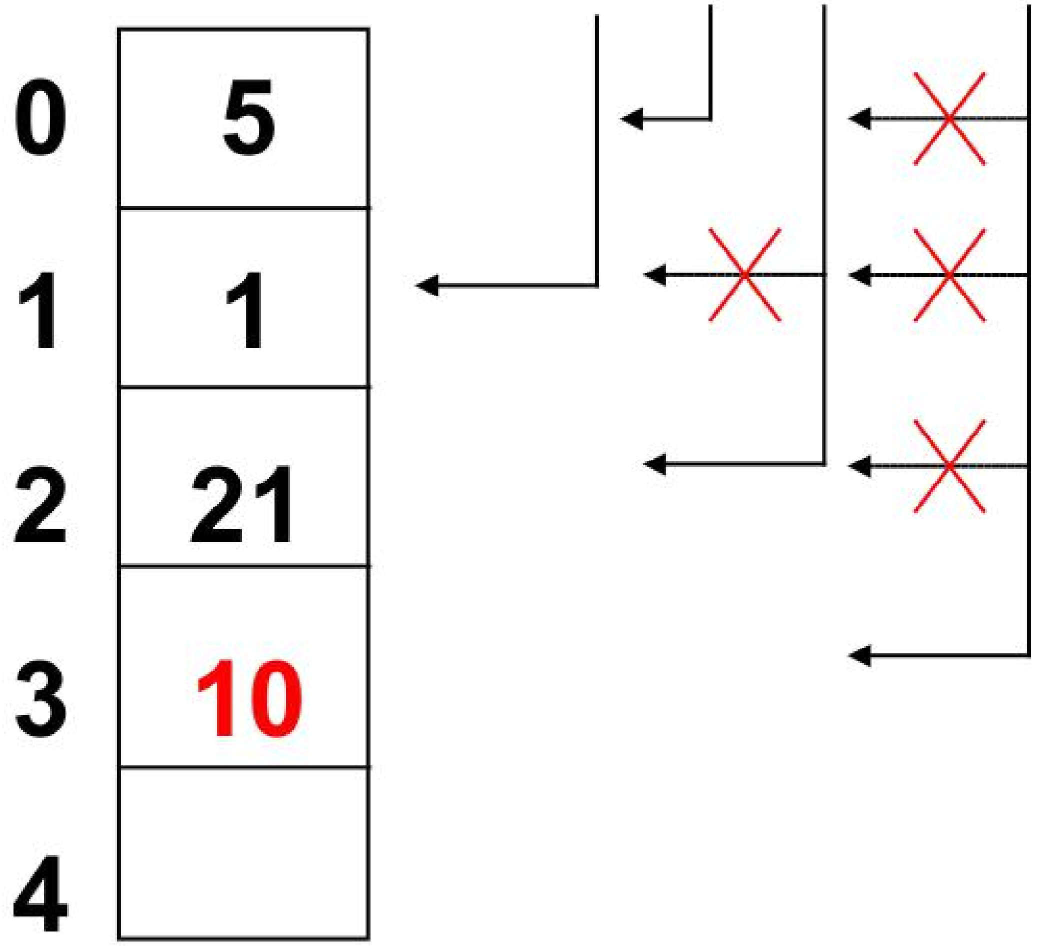
=> 1. linear probing

vlož o 1 pozici dál (i++ => i = 1)

b1) Linear probing

$h(k) = (k + i) \bmod 5$

posloupnost: 1, 5, 21, 10, 7



1. kolize - 5 blokuje - vlož dál

2. kolize - 1 blokuje - vlož dál

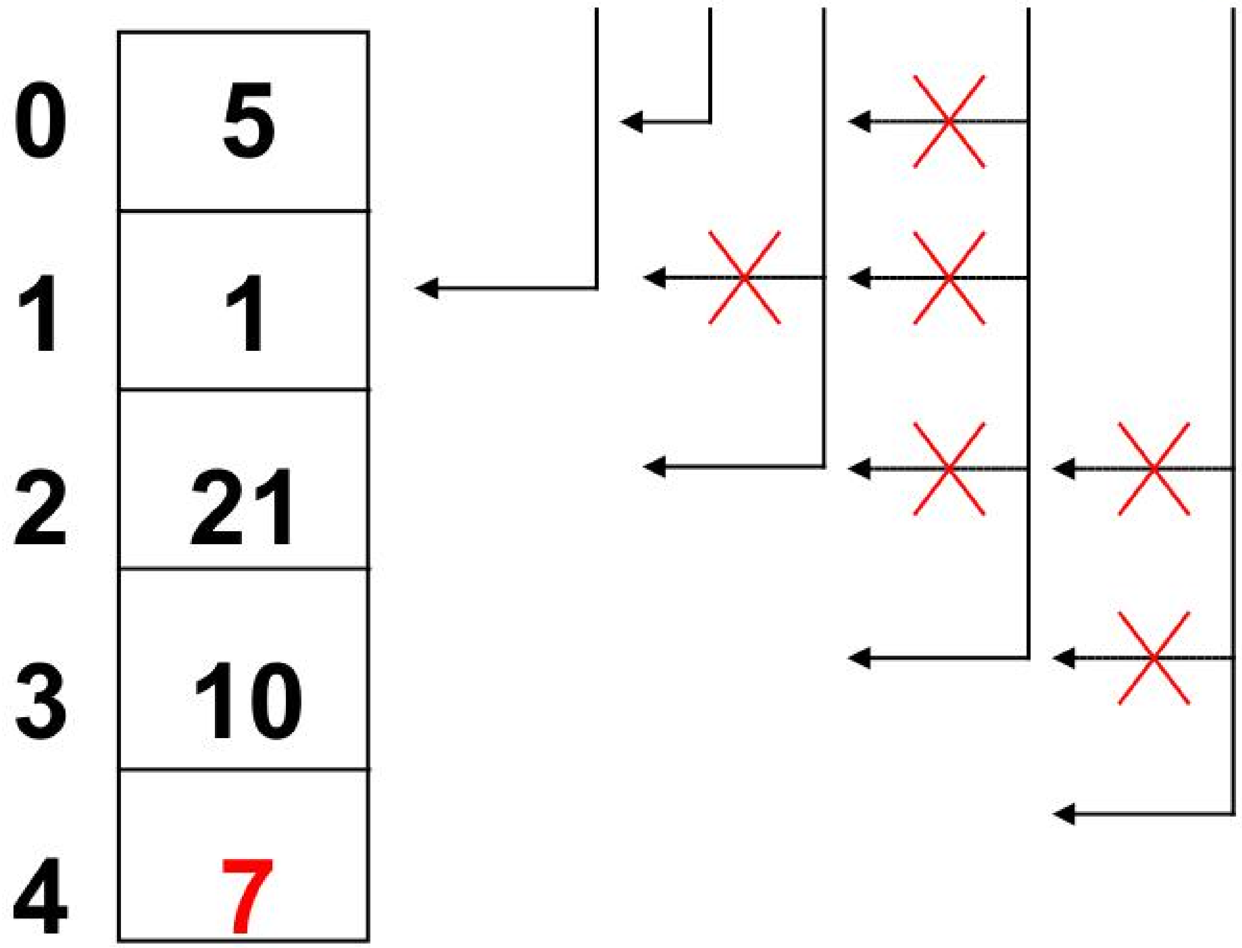
3. kolize - 21 blokuje - vlož dál

vloženo o 3 pozice dál (i = 3)

b1) Linear probing

$h(k)$ = (k + i) mod 5

posloupnost: 1, 5, 21, 10, 7



1. kolize - vlož dál (i++)

2. kolize - vlož dál (i++)

vlož o 2 pozice dál (i = 2)

b1) Linear probing

$h(k) = (k + i) \bmod 5$

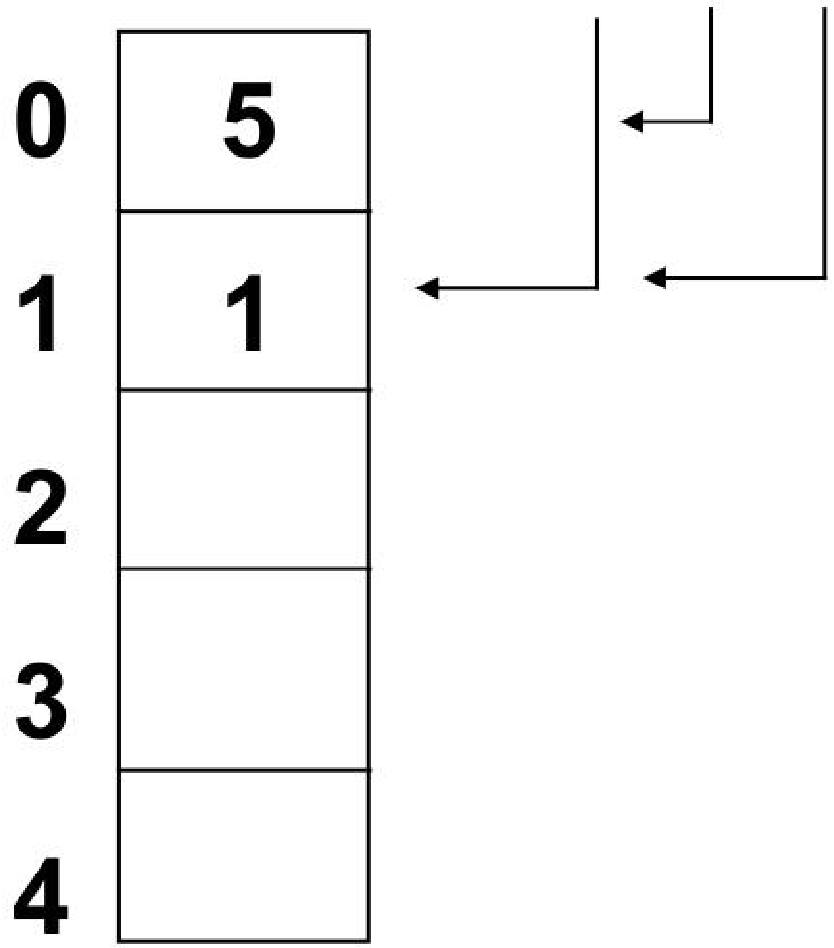
posloupnost: 1, 5, 21, 10, 7

0	**5**	i = 0
1	**1**	i = 0
2	**21**	i = 1
3	**10**	i = 3
4	**7**	i = 2

b1) Linear probing

$h(k) = k \bmod 5$

posloupnost: 1, 5, 21, 10, 7



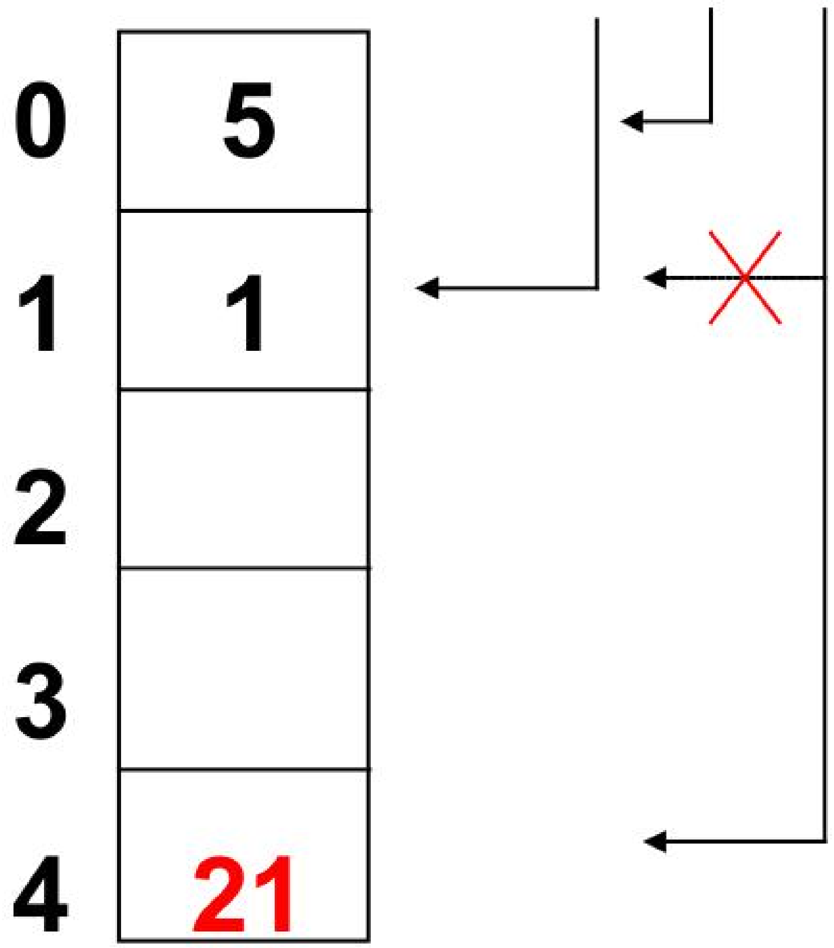
kolize - 1 blokuje (collision-blocks)

b1) Linear probing

$h(k) = [(k \bmod 5) + i.\mathbf{const}\,] \bmod 5$, $h(k) = (k + i.\mathbf{3}) \bmod 5$

posloupnost: 1, 5, 21, 10, 7

stačí prvočíslo $\neq$ m
nebo číslo nesoudělné s m



kolize - 1 blokuje

(collision blocks)

vlož o 3 pozice dál (i++ => i = 1)

(i je číslo pokusu)

b1) Linear probing

$h(k) = [(k \bmod 5) + i.\mathbf{const}\,] \bmod 5$, $h(k) = (k + i.\mathbf{3}) \bmod 5$

stačí prvočíslo $\neq$ m
nebo číslo nesoudělné s m

posloupnost: 1, 5, 21, 10, 7

0	**5**
1	**1**
2	
3	
4	**21**

kolize - 1 blokuje

(collision blocks)

vlož o 3 pozice dál (i++ => i = 1)

(i je číslo pokusu)

b1) Linear probing

$h(k)$ = (k + i.3) mod 5

posloupnost: 1, 5, 21, 10, 7

0	**5**
1	**1**
2	
3	**10**
4	**21**

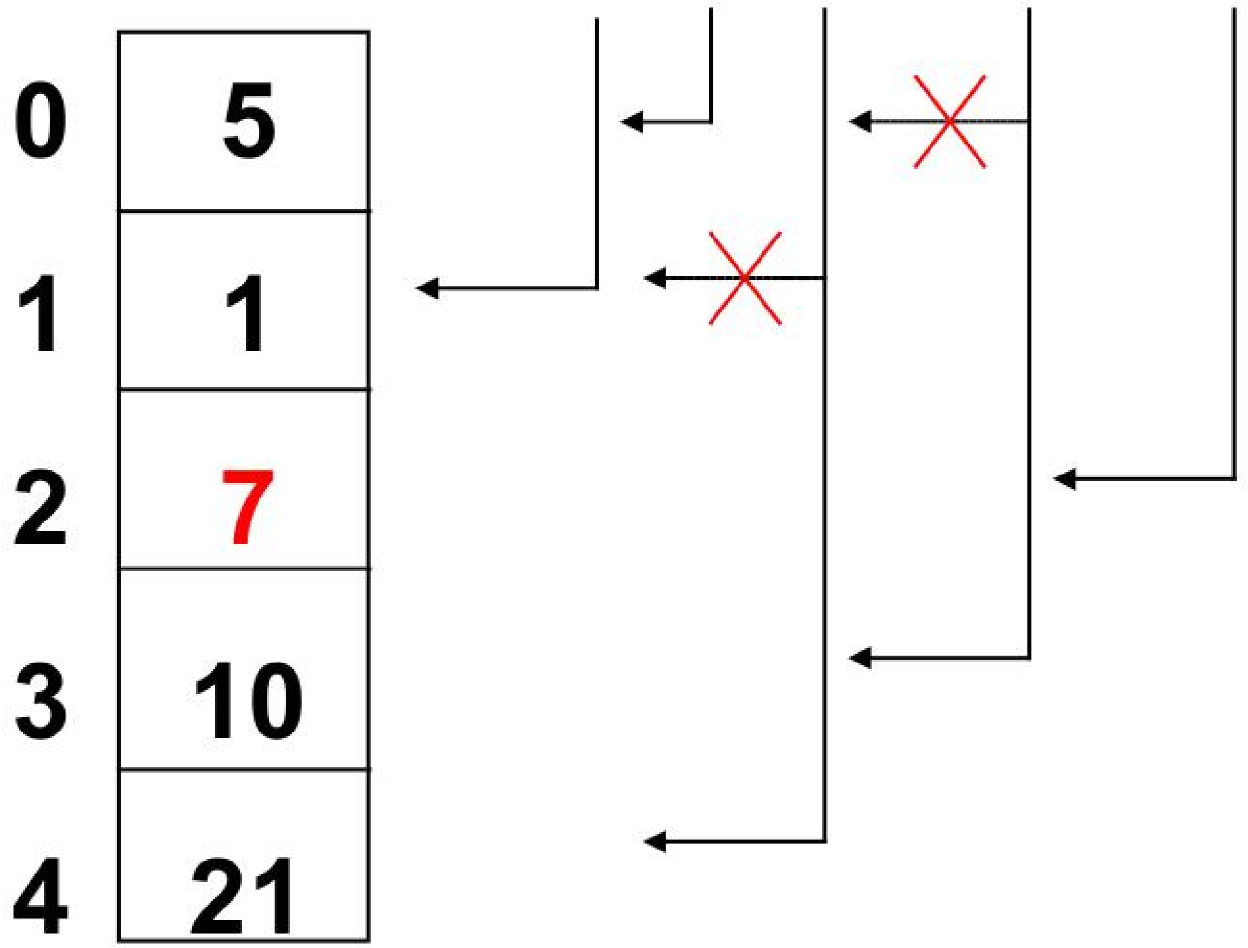
kolize - 5 blokuje - vlož dál

(vlož o 3 pozice dál (i = 1)

b1) Linear probing

$h(k)$ = (k + i.3) mod 5

posloupnost: 1, 5, 21, 10, 7



i = 0

b1) Linear probing

$h(k) = (k + i.3) \bmod 5$

posloupnost: 1, 5, 21, 10, 7

0	**5**	i = 0
1	**1**	i = 0
2	**7**	i = 0
3	**10**	i = 1
4	**21**	i = 1

b1) Linear probing

$h(k) = (k \boxed{+ i.3}) \bmod 5$

posloupnost: 1, 5, 21, 10, 7

0	**5**	i = 0
1	**1**	i = 0
2	**7**	i = 0
3	**10**	i = 1
4	**21**	i = 1

b1) Linear probing

$h(k) = (k + i) \bmod 5$

0	**5**	i = 0
1	**1**	i = 0
2	**21**	i = 1
3	**10**	i = 3 !
4	**7**	i = 2

hrozí dlouhé shluky
(long clusters)

$h(k) = (k + i.3) \bmod 5$

0	**5**	i = 0
1	**1**	i = 0
2	**7**	i = 0
3	**10**	i = 1
4	**21**	i = 1

vhodná volba posunu
i·3 je věcí náhody

b1) Linear probing

$h(k) = (k + i) \bmod 5$

0	**5**	i = 0
1	**1**	i = 0
2	**21**	i = 1
3	**10**	i = 3 !
4	**7**	i = 2

hrozí dlouhé shluky
(long clusters)

$h(k) = (k + i.3) \bmod 5$

0	**5**	i = 0
1	**1**	i = 0
2	**7**	i = 0
3	**10**	i = 1
4	**21**	i = 1

vhodná volba posunu
i·3 je věcí náhody

b1) Linear probing

```
private:
  Item *ht; int N,M;   [Sedgewick]
  Item nullItem;
public:
  init( int maxN )          // initialization
  {
    N=0;                    // Number of stored items
    M = 2*maxN;             // load_factor < 1/2
    ht = new Item[M];
    for( int i = 0; i < M; i++ )
       ht[i] = nullItem;
  }...
```

b1) Linear probing

```
void insert( Item item )
{
  int i = hash( item.key(), M );

  while( !ht[i].null() )
      i = (i+const) % M; // Linear probing

  ht[i] = item;
  N++;
}
```

b1) Linear probing

```
Item search( Key k )
{
  int i = hash( k, M );

  while( !ht[i].null() ) { // !cluster end
                           // zarážka (sentinel)
     if( k == ht[i].key() )
          return ht[i];
     else
          i = (i+const) % M; // Linear probing
    }
    return nullItem;
}
```

b) Otevřené rozptylování
(open-addressing hashing)

Metoda řešení kolizí
(solution of collisions)

b1) Linear probing
Lineární prohledávání

b2) Double hashing
Dvojí rozptylování

b) Otevřené rozptylování
(open-addressing hashing)

Metoda řešení kolizí
(solution of collisions)

b1) Linear probing

Lineární prohledávání

b2) Double hashing

Dvojí rozptylování

b2) Double hashing

Hash function $h(k) = [h_1(k) + i.h_2(k)] \bmod m$

$h_1(k) = k \bmod m$ // initial position

$h_2(k) = 1 + (k \bmod m')$ // offset

Both depend on k

=>

Each key has different probe sequence

m = prime number or m = power of 2

m' = slightly less m' = odd

If d = greatest common divisor => search m/d slots only

Ex: $k = 123456$, $m = 701$, $m' = 700$

$h_1(k) = 80$, $h_2(k) = 257$ Starts at 80, and every 257 % 701

b2) Double hashing

Hash function $h(k) = [h_1(k) + i.h_2(k)] \bmod m$

$h_1(k) = k \bmod m$ // initial position

$h_2(k) = 1 + (k \bmod m')$ // offset

Both depend on k

=>

Each key has different probe sequence

m = prime number or m = power of 2

m' = slightly less m' = odd

If d = greatest common divisor => search m/d slots only

Ex: $k = 123456$, $m = 701$, $m' = 700$

$h_1(k) = 80$, $h_2(k) = 257$ Starts at 80, and every 257 % 701

b2) Double hashing

```
void insert( Item item )
{
  Key k = item.key();
  int i = hash( k, M ),
      j = hashTwo( k, M );// different for k1 != k2

  while( !ht[i].null() )
     i = (i+j) % M; //Double Hashing

  ht[i] = item; N++;
}
```

b2) Double hashing

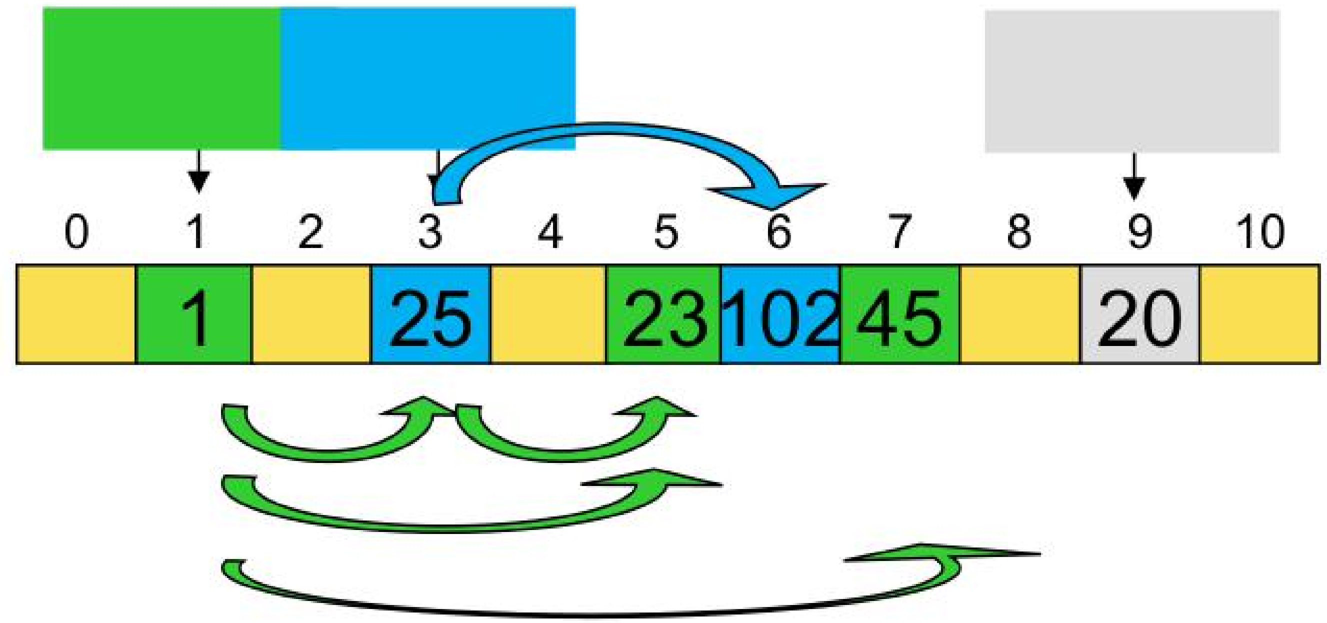
```
Item search( Key k )
{
  int i = hash( k, M ),
      j = hashTwo( k, M );// different for k1 != k2

  while( !ht[i].null() )
  {
     if( k == ht[i].key() )
          return ht[i];
     else
          i = (i+j) % M; // Double Hashing
   }
   return nullItem;
}
```

Double hashing - example

b2) Double hashing $h(k) = [h_1(k) + i.h_2(k)]$ mod m

Input	$h_1(k)=$ k %11	$h_2(k)=$ 1+k %10	i	$h(k)$
1	1	2	0	1
25	3	6	0	3
23	1	4	0,1	1,5
45	1	6	0,1	1,7
102	3	3	0,1	3,6
20	9	1	0	9



$h_1(k) = k$ % 11

$h_2(k) = 1 + (k$ % $10)$

b) Otevřené rozptylování (open-addressing hashing)

α = plnění tabulky (*load factor of the table*)

α = n/m, $\alpha \in \langle 0,1)$

***n* = počet prvků (*number of items in the table*)**

***m* = velikost tabulky, m>n (*table size*)**

b) Otevřené rozptylování (open-addressing hashing)

α = plnění tabulky (*load factor of the table*)

α = n/m, $\alpha \in \langle 0,1 \rangle$

***n* = počet prvků (*number of items in the table*)**

***m* = velikost tabulky, m>n (*table size*)**

b) Otevřené rozptylování (open-addressing hashing)

Expected number of probes

Linear probing:

Search hits	**$0.5\,(1 + 1 / (1 - \alpha))$**	**found**
Search misses	**$0.5\,(1 + 1 / (1 - \alpha)^2)$**	**not found**

Double hashing:

Search hits	**$(1 / \alpha) \ln (1 / (1 - \alpha))$**
Search misses	**$1 / (1 - \alpha)$**

$\alpha = n/m$, $\alpha \in \langle 0,1 \rangle$

b) Otevřené rozptylování (open-addressing hashing)

Expected number of probes

Linear probing:

Search hits	$0.5\,(1 + 1 / (1 - \alpha))$	**found**
Search misses	$0.5\,(1 + 1 / (1 - \alpha)^2)$	**not found**

Double hashing:

Search hits	$(1 / \alpha) \ln (1 / (1 - \alpha))$
Search misses	$1 / (1 - \alpha)$

$\alpha = n/m,\ \alpha \in \langle 0,1)$

b) Očekávaný počet testů

Linear probing:

Plnění α	1/2	2/3	3/4	9/10
Search hit	1.5	2.0	2.5	5.5
Search miss	2.5	5.0	8.5	50.5

Double hashing:

Plnění α	1/2	2/3	3/4	9/10
Search hit	1.4	1.6	1.8	2.6
Search miss	2.0	3.0	4.0	10.0

Tabulka může být více zaplněná, než začne klesat výkonnost.

K dosažení stejného výkonu stačí menší tabulka.