

## Př. 5/12: (ne)izomorfní grafy

---

Platí tvrzení, že každé dva souvislé grafy se stejným počtem vrcholů, kde všechny vrcholy mají stejný stupeň, jsou izomorfní? (Tvrzení dokažte, nebo najděte protipříklad.)

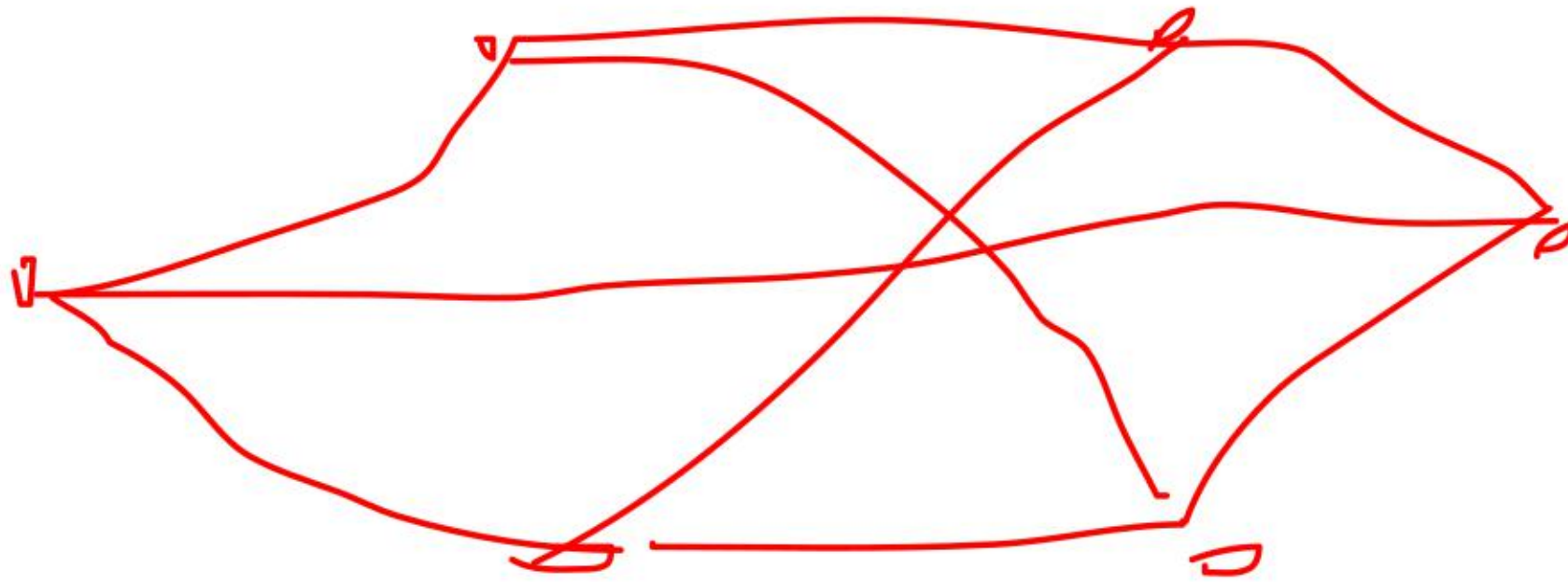
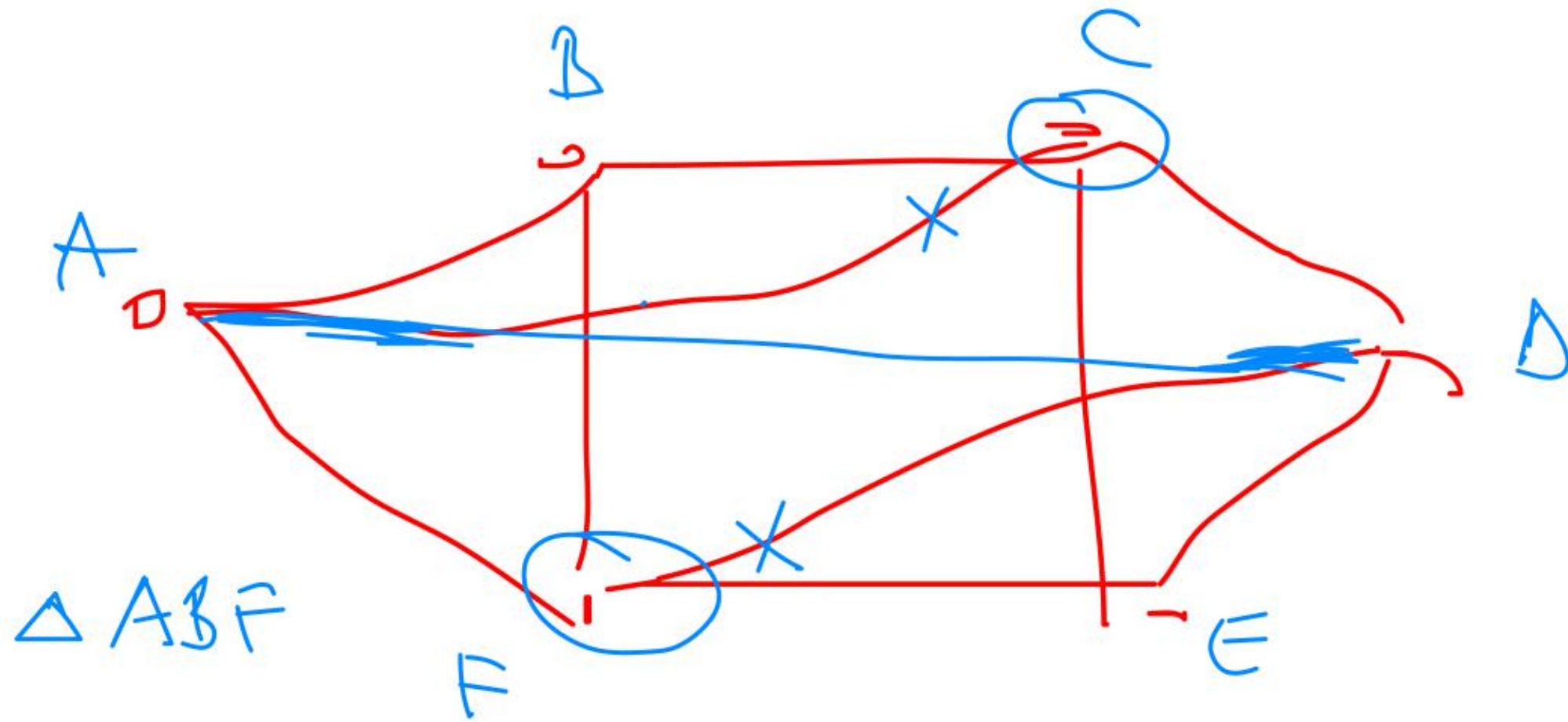
## Př. 5/12: (ne)izomorfní grafy

Platí tvrzení, že každé dva souvislé grafy se stejným počtem vrcholů, kde všechny vrcholy mají stejný stupeň, jsou izomorfní? (Tvrzení dokažte, nebo najděte protipříklad.)

1  
2  
3



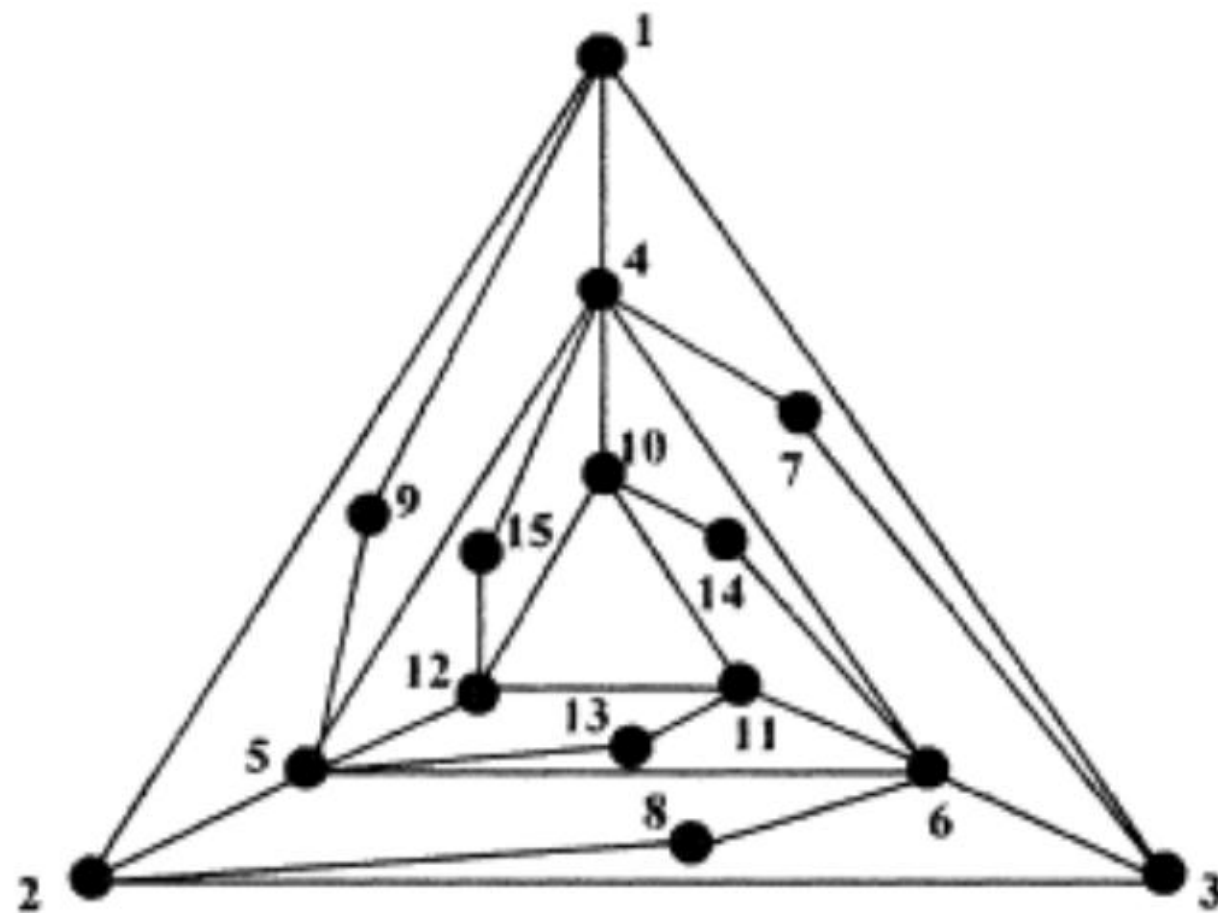




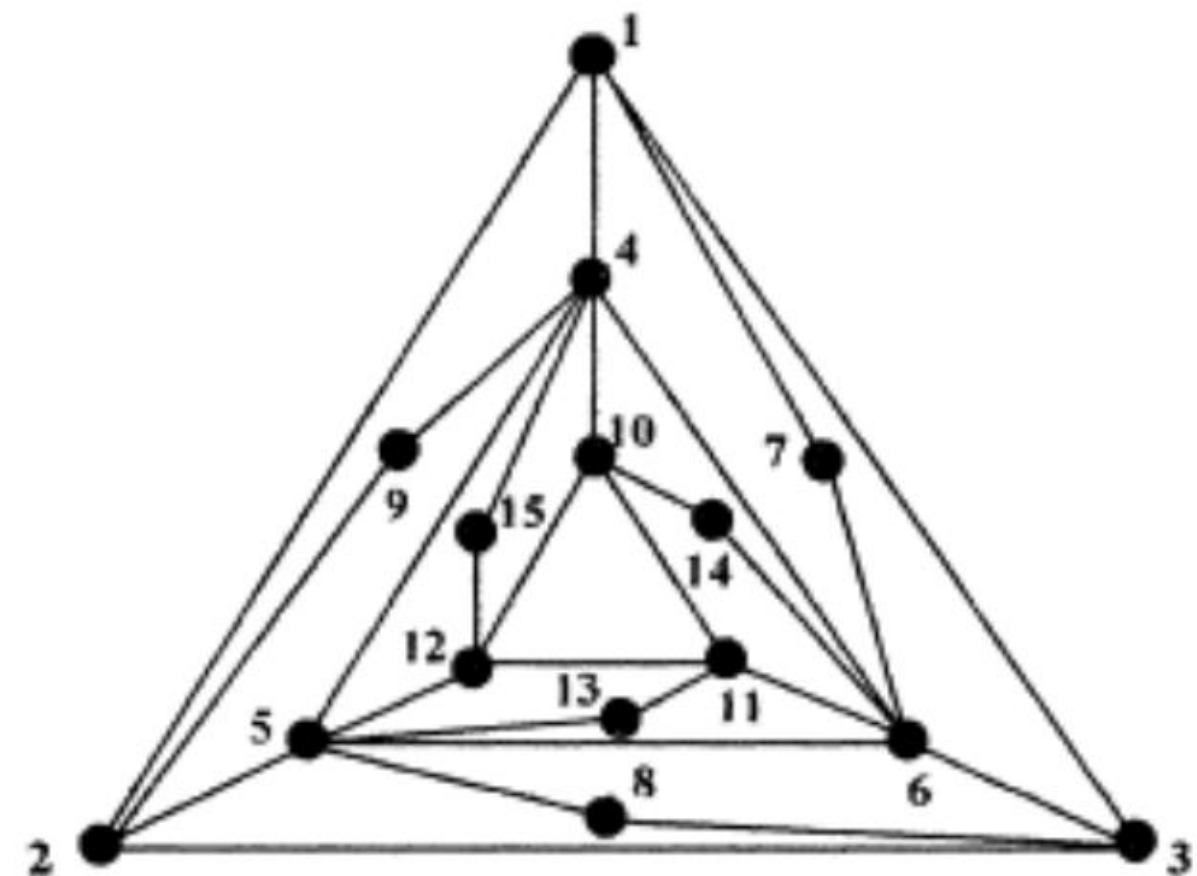
Yes	7	87%
No	1	12%

## Př. 5/6: izomorfismus

Popište, jak budete co nejefektivněji rozhodovat, zda dva uvedené grafy jsou nebo nejsou izomorfní.



(a)

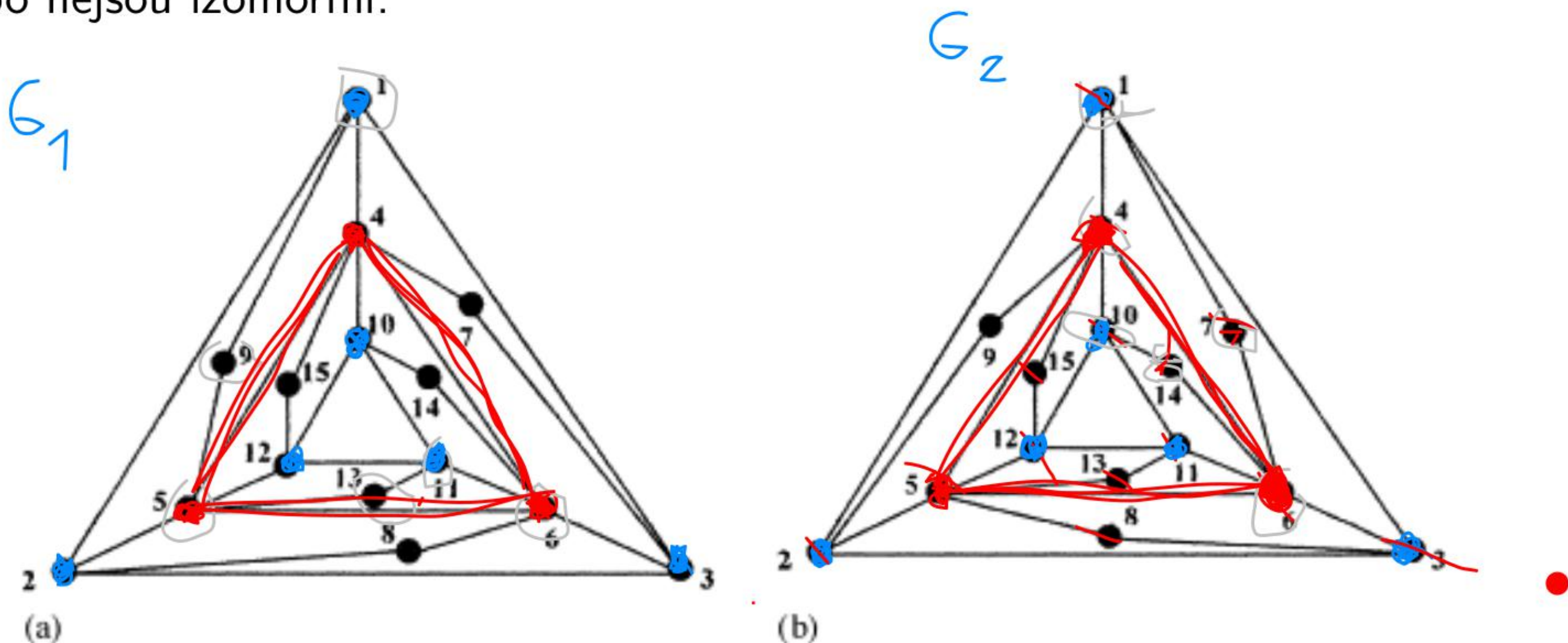


(b)



# Př. 5/6: izomorfismus

Popište, jak budete co nejefektivněji rozhodovat, zda dva uvedené grafy jsou nebo nejsou izomorfní.



Invariant:  $\exists$  cyklus délky 6 s vrcholy stupně 4, 2, 6, 2, 4, 6

Yes	8	100%
No	0	50% <sup>38</sup>



## Př. 6/6: předchozí podmnožina

---

Uvažujme všechny  $k$ -prvkové podmnožiny množiny

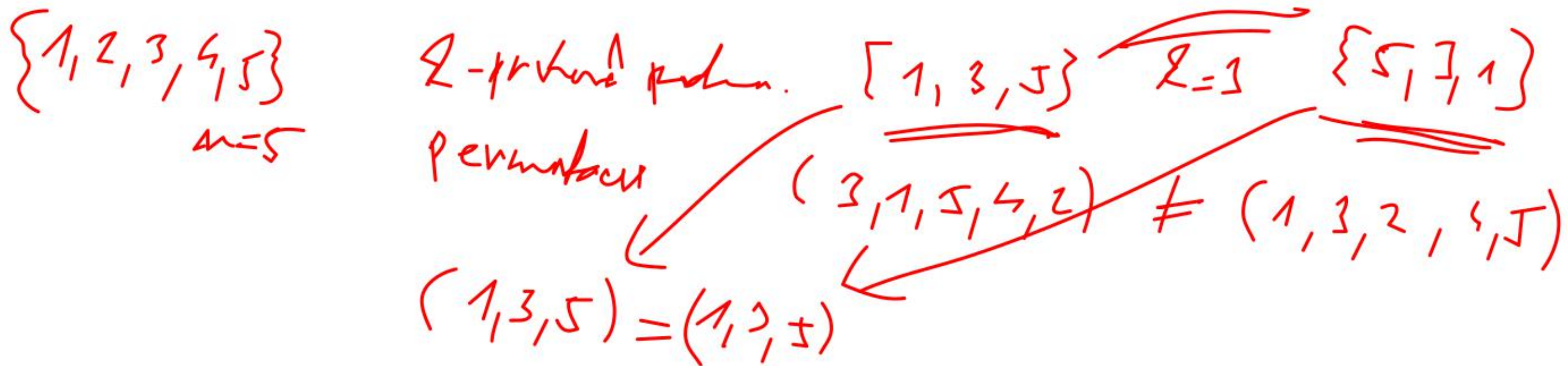
$M = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ,  $1 \leq k \leq n$ . Vyjděte z algoritmu transformujícího seznam prvků jedné podmnožiny na seznam prvků podmnožiny bezprostředně následující v lexikografickém uspořádání těchto podmnožin. Navrhněte a popište algoritmus, který bude transformovat seznam prvků jedné podmnožiny na seznam prvků podmnožiny bezprostředně předcházející v témže lexikografickém uspořádání. Bude mít stejnou asymptotickou složitost?



## Př. 6/6: předchozí podmnožina

Uvažujme všechny  $k$ -prvkové podmnožiny množiny

$M = \{1, 2, 3, \dots, n\}, 1 \leq k \leq n$ . Vyjděte z algoritmu transformujícího seznam prvků jedné podmnožiny na seznam prvků podmnožiny bezprostředně následující v lexikografickém uspořádání těchto podmnožin. Navrhněte a popište algoritmus, který bude transformovat seznam prvků jedné podmnožiny na seznam prvků podmnožiny bezprostředně předcházející v témže lexikografickém uspořádání. Bude mít stejnou asymptotickou složitost?



Yes	5	71%
No	2	28%



$$T = 1$$

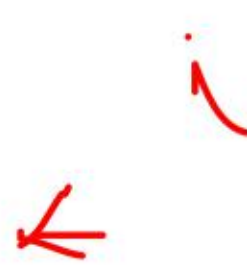
$$n=5 \quad 2=3 \quad \binom{5}{3} = 10$$

$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 1 & 2 & 5 \\ \hline \end{array}$   
 $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 1 & 4 & 5 \\ \hline 2 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 3 & 5 \\ \hline \end{array}$   
 $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 4 & 5 \\ \hline 3 & 4 & 5 \\ \hline \end{array}$

$\underline{1} \quad \underline{2} \quad \boxed{5}$

$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 4 & 5 \\ \hline \end{array}$   
 $\textcircled{3} \quad 4 \quad 5$

$$if \quad K = T[K]$$



Yes	8	100%
No	0	0%
		80% 38

## Př. 6/8: pořadí permutace

---

Rank permutace  $\pi$  množiny  $N = \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$  je pořadové číslo této permutace v seznamu všech permutací množiny  $N$  uspořádaném v rostoucím lexikografickém pořadí, přičemž prvky seznamu jsou číslovány od 0. Napište pseudokód funkce která v čase úměrném  $n$  vytiskne takovou permutaci  $\pi$  množiny  $N$ , jejíž rank je právě  $n!/2$ . Předpokládáme  $n \geq 2$ .



## Př. 6/8: pořadí permutace

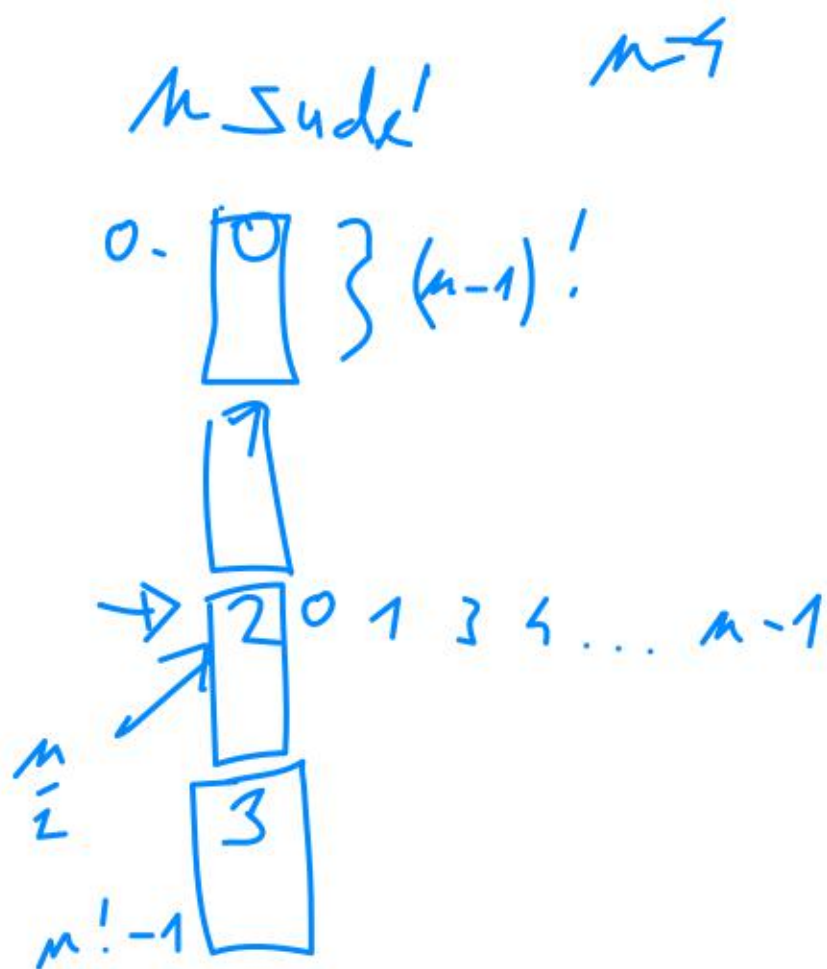
---

Rank permutace  $\pi$  množiny  $N = \{0, 1, 2, \dots, n - 1\}$  je pořadové číslo této permutace v seznamu všech permutací množiny  $N$  uspořádaném v rostoucím lexikografickém pořadí, přičemž prvky seznamu jsou číslovány od 0. Napište pseudokód funkce která v čase úměrném  $n$  vytiskne takovou permutaci  $\pi$  množiny  $N$ , jejíž rank je právě  $n!/2$ . Předpokládáme  $n \geq 2$ .



## Př. 6/8: pořadí permutace

Rank permutace  $\pi$  množiny  $N = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$  je pořadové číslo této permutace v seznamu všech permutací množiny  $N$  uspořádaném v rostoucím lexikografickém pořadí, přičemž prvky seznamu jsou číslovány od 0. Napište pseudokód funkce která v čase úměrném  $n$  vytiskne takovou permutaci  $\pi$  množiny  $N$ , jejíž rank je právě  $n!/2$ . Předpokládáme  $n \geq 2$ .



Yes

8

100%

No

0

90% 38



---

# Konečné automaty, nedeterminizmus. Regulární výrazy

## Př. 7/1a: jazyky

---

Nad abecedou  $\{0, 1\}$ , jsou dány dva jazyky  $L1$  a  $L2$ . Slova  $L1$  jsou popsána regulárním výrazem  $0 * 1 * 0 * 1 * 0*$ , slova  $L2$  jsou popsána regulárním výrazem  $(01 + 10)*$ .

a) Najděte nejkratší neprázdné slovo v průniku  $L1 \cap L2$ .

## Př. 7/1a: jazyky 01

Nad abecedou  $\{0, 1\}$ , jsou dány dva jazyky  $L1$  a  $L2$ . Slova  $L1$  jsou popsána regulárním výrazem  $0^* 1^* 0^* 1^* 0^*$ , slova  $L2$  jsou popsána regulárním výrazem  $(01 \oplus 10)^*$ .

a) Najděte nejkratší neprázdné slovo v průniku  $L1 \cap L2$ .

$L1$  ~~0~~  
0  
0000  
111111

$L2$  ~~0~~  
01  
10  
0110  
010101  
10011010

01 10 10  
→

Yes	8	100%
No	2	12.5%

## Př. 7/1b: jazyky

---

Nad abecedou  $\{0, 1\}$ , jsou dány dva jazyky  $L1$  a  $L2$ . Slova  $L1$  jsou popsána regulárním výrazem  $0 * 1 * 0 * 1 * 0^*$ , slova  $L2$  jsou popsána regulárním výrazem  $(01 + 10)^*$ .

b) Najděte nejdelší slovo v průniku  $L1 \cap L2$ .



## Př. 7/1c: jazyky

---

Nad abecedou  $\{0, 1\}$ , jsou dány dva jazyky  $L1$  a  $L2$ . Slova  $L1$  jsou popsána regulárním výrazem  $0 * 1 * 0 * 1 * 0*$ , slova  $L2$  jsou popsána regulárním výrazem  $(01 + 10)*$ .

c) Najděte nejkratší slovo, které leží v  $L1$ , ale neleží v  $L2$ .

## Př. 7/1b: jazyky

---

Nad abecedou  $\{0, 1\}$ , jsou dány dva jazyky  $L1$  a  $L2$ . Slova  $L1$  jsou popsána regulárním výrazem  $0 * 1 * 0 * 1 * 0^*$ , slova  $L2$  jsou popsána regulárním výrazem  $(01 + 10)^*$ .

b) Najděte nejdelší slovo v průniku  $L1 \cap L2$ .

## Př. 7/1b: jazyky

Nad abecedou  $\{0, 1\}$ , jsou dány dva jazyky  $L1$  a  $L2$ . Slova  $L1$  jsou popsána regulárním výrazem  $0^* 1^* 0^* 1^* 0^*$ , slova  $L2$  jsou popsána regulárním výrazem  $(01 + 10)^*$ .

b) Najděte nejdelší slovo v průniku  $L1 \cap L2$ .

Handwritten analysis for  $L1$  (regular expression  $0^* 1^* 0^* 1^* 0^*$ ):

The string  $0110010$  is shown with blue annotations above it:  $a$  over  $0$ ,  $b$  over  $11$ ,  $c$  over  $00$ ,  $d$  over  $1$ , and  $e$  over  $0$ . Below the string, green brackets group the characters into pairs:  $(0,1)$  labeled  $f$ ,  $(1,0)$  labeled  $g$ ,  $(0,1)$  labeled  $f$ , and  $(0,0)$  labeled  $g$ .

Handwritten analysis for  $L2$  (regular expression  $(01 + 10)^*$ ):

The string  $11110000$  is shown with blue annotations above it:  $01$  over the first two  $1$ 's,  $10$  over the next two  $1$ 's,  $01$  over the next two  $0$ 's, and  $10$  over the last two  $0$ 's. Below the string, blue arrows point from each character to a corresponding character in the string below it:  $1 \rightarrow 0$ ,  $1 \rightarrow 1$ ,  $1 \rightarrow 0$ ,  $1 \rightarrow 1$ ,  $0 \rightarrow 0$ ,  $0 \rightarrow 1$ ,  $0 \rightarrow 0$ , and  $0 \rightarrow 1$ . A red 'X' is drawn over the last two characters ( $00$ ).

## Př. 7/1c: jazyky

---

Nad abecedou  $\{0, 1\}$ , jsou dány dva jazyky  $L1$  a  $L2$ . Slova  $L1$  jsou popsána regulárním výrazem  $0 * 1 * 0 * 1 * 0*$ , slova  $L2$  jsou popsána regulárním výrazem  $(01 + 10)*$ .

c) Najděte nejkratší slovo, které leží v  $L1$ , ale neleží v  $L2$ .

## Př. 7/1c: jazyky

Nad abecedou  $\{0, 1\}$ , jsou dány dva jazyky  $L1$  a  $L2$ . Slova  $L1$  jsou popsána regulárním výrazem  $0^* 1^* 0^* 1^* 0^*$ , slova  $L2$  jsou popsána regulárním výrazem  $(01 + 10)^*$ .

c) Najděte nejkratší slovo, které leží v  $L1$ , ale neleží v  $L2$ .

~~00~~

0 ~~ne~~ 1

.

## Př. 7/1d: jazyky

---

Nad abecedou  $\{0, 1\}$ , jsou dány dva jazyky  $L1$  a  $L2$ . Slova  $L1$  jsou popsána regulárním výrazem  $0 * 1 * 0 * 1 * 0*$ , slova  $L2$  jsou popsána regulárním výrazem  $(01 + 10)*$ .

d) Najděte nejkratší slovo, které leží v  $L2$ , ale neleží v  $L1$ .



## Př. 7/1d: jazyky

Nad abecedou  $\{0, 1\}$ , jsou dány dva jazyky  $L1$  a  $L2$ . Slova  $L1$  jsou popsána regulárním výrazem  $\cancel{0} * \underline{1} * \underline{0} * \underline{1} * \underline{0}$ , slova  $L2$  jsou popsána regulárním výrazem  $(\underline{01} + \underline{10})^*$ .

d) Najděte nejkratší slovo, které leží v  $L2$ , ale neleží v  $L1$ .

101010  
01

010101  
~~010101~~

## Př. 7/1e: jazyky

---

Nad abecedou  $\{0, 1\}$ , jsou dány dva jazyky  $L1$  a  $L2$ . Slova  $L1$  jsou popsána regulárním výrazem  $0 * 1 * 0 * 1 * 0*$ , slova  $L2$  jsou popsána regulárním výrazem  $(01 + 10)*$ .

e) Najděte nejkratší slovo, které neleží v  $L1 \cup L2$ .

## Př. 7/1e: jazyky

---

Nad abecedou  $\{0, 1\}$ , jsou dány dva jazyky  $L1$  a  $L2$ . Slova  $L1$  jsou popsána regulárním výrazem  $0 * 1 * 0 * 1 * 0*$ , slova  $L2$  jsou popsána regulárním výrazem  $(01 + 10)*$ .

e) Najděte nejkratší slovo, které neleží v  $L1 \cup L2$ .

10101

✓✓

## Př. 7/2a: automaty

---

Nakreslete stavový diagram automatu přijímajícího právě všechna slova nad abecedou  $\{0, 1\}$ , která

- a) **obsahují podposloupnost 1010 alespoň jednou,**
- b) **neobsahují podposloupnost 1010,**
- c) **obsahují podposloupnost 1010 právě jednou,**
- d) **obsahují podposloupnost 1010 nejvýše dvakrát.**



## Př. 7/2a: automaty

---

Nakreslete stavový diagram automatu přijímajícího právě všechna slova nad abecedou  $\{0, 1\}$ , která

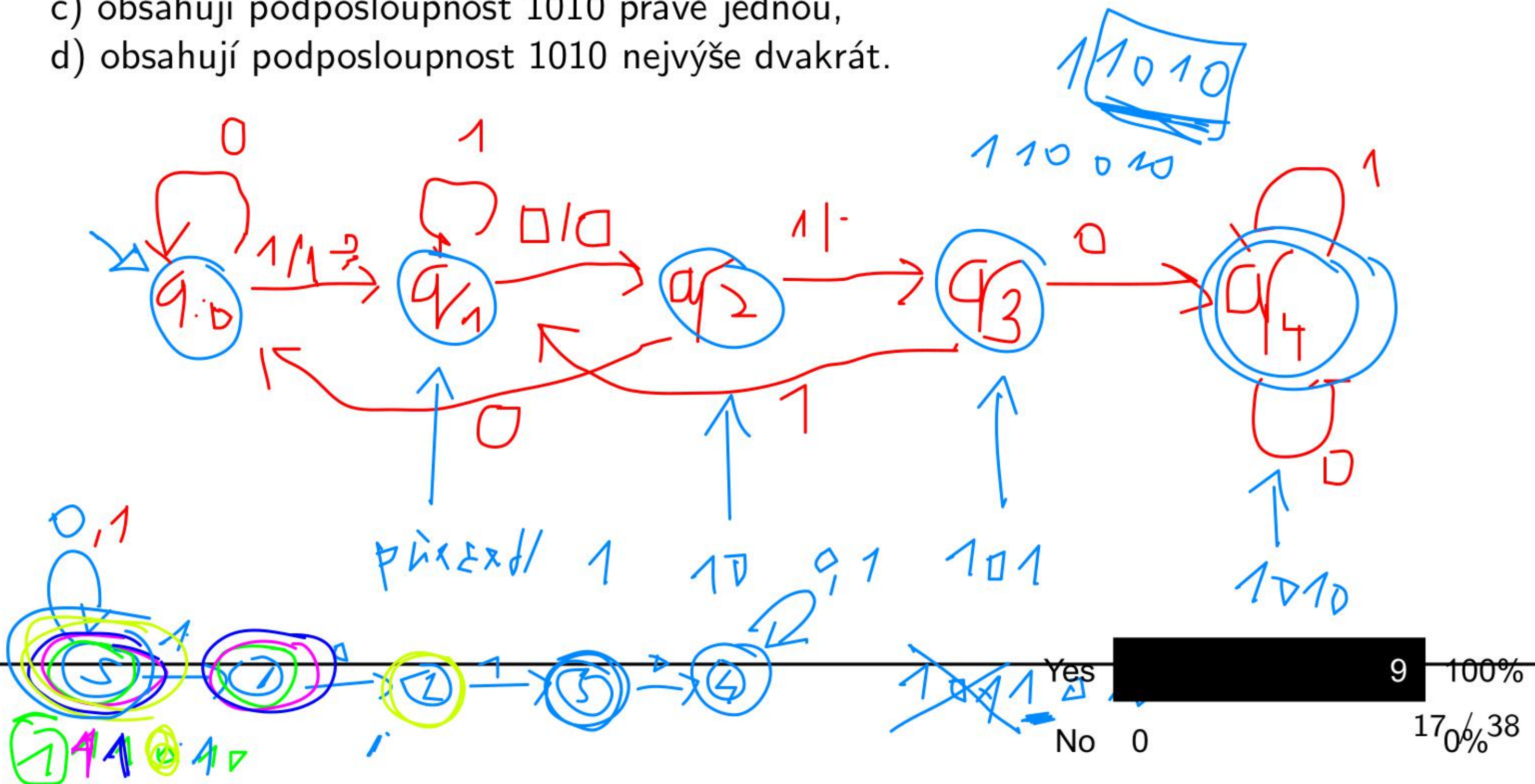
- a) **obsahují podposloupnost 1010 alespoň jednou,**
- b) **neobsahují podposloupnost 1010,**
- c) **obsahují podposloupnost 1010 právě jednou,**
- d) **obsahují podposloupnost 1010 nejvýše dvakrát.**



## Př. 7/2a: automaty

Nakreslete stavový diagram automatu přijímajícího právě všechna slova nad abecedou  $\{0, 1\}$ , která

- a) obsahují podposloupnost 1010 alespoň jednou,
- b) neobsahují podposloupnost 1010,
- c) obsahují podposloupnost 1010 právě jednou,
- d) obsahují podposloupnost 1010 nejvýše dvakrát.





## Př. 7/2b: automaty

---

Nakreslete stavový diagram automatu přijímajícího právě všechna slova nad abecedou  $\{0, 1\}$ , která

- a) obsahují podposloupnost 1010 alespoň jednou,
- b) neobsahují podposloupnost 1010,**
- c) obsahují podposloupnost 1010 právě jednou,
- d) obsahují podposloupnost 1010 nejvýše dvakrát.



## Př. 7/2c: automaty

---

Nakreslete stavový diagram automatu přijímajícího právě všechna slova nad abecedou  $\{0, 1\}$ , která

- a) obsahují podposloupnost 1010 alespoň jednou,
- b) neobsahují podposloupnost 1010,
- c) obsahují podposloupnost 1010 právě jednou,**
- d) obsahují podposloupnost 1010 nejvýše dvakrát.



## Př. 7/2d: automaty

---

Nakreslete stavový diagram automatu přijímajícího právě všechna slova nad abecedou  $\{0, 1\}$ , která

- a) obsahují podposloupnost 1010 alespoň jednou,
- b) neobsahují podposloupnost 1010,
- c) obsahují podposloupnost 1010 právě jednou,
- d) obsahují podposloupnost 1010 nejvýše dvakrát.**





## Př. 7/3a: regulární výrazy

---

Napište regulární výraz pro jazyk nad abecedou  $\{0, 1\}$

- a) **jehož slova obsahují pouze nuly**
- b) jehož každé slovo obsahuje právě jedinou jedničku
- c) jehož každé slovo obsahuje alespoň jednu jedničku
- d) jehož každé slovo obsahuje alespoň dvě jedničky
- e) jehož slova obsahují sudý počet jedniček
- f) jehož slova obsahují lichý počet jedniček

## Př. 7/3a: regulární výrazy

Napište regulární výraz pro jazyk nad abecedou  $\{0, 1\}$

a) jehož slova obsahují pouze nuly

b) jehož každé slovo obsahuje právě jedinou jedničku

c) jehož každé slovo obsahuje alespoň jednu jedničku

d) jehož každé slovo obsahuje alespoň dvě jedničky

e) jehož slova obsahují sudý počet jedniček

f) jehož slova obsahují lichý počet jedniček

0, 1  
\*  
( )  
+  
(0+1)\*

## Př. 7/3b: regulární výrazy

---

Napište regulární výraz pro jazyk nad abecedou  $\{0, 1\}$

- a) jehož slova obsahují pouze nuly
- b) jehož každé slovo obsahuje právě jedinou jedničku**
- c) jehož každé slovo obsahuje alespoň jednu jedničku
- d) jehož každé slovo obsahuje alespoň dvě jedničky
- e) jehož slova obsahují sudý počet jedniček
- f) jehož slova obsahují lichý počet jedniček

## Př. 7/3c: regulární výrazy

---

Napište regulární výraz pro jazyk nad abecedou  $\{0, 1\}$

- a) jehož slova obsahují pouze nuly
- b) jehož každé slovo obsahuje právě jedinou jedničku
- c) jehož každé slovo obsahuje alespoň jednu jedničku**
- d) jehož každé slovo obsahuje alespoň dvě jedničky
- e) jehož slova obsahují sudý počet jedniček
- f) jehož slova obsahují lichý počet jedniček

## Př. 7/3d: regulární výrazy

---

Napište regulární výraz pro jazyk nad abecedou  $\{0, 1\}$

- a) jehož slova obsahují pouze nuly
- b) jehož každé slovo obsahuje právě jedinou jedničku
- c) jehož každé slovo obsahuje alespoň jednu jedničku
- d) jehož každé slovo obsahuje alespoň dvě jedničky**
- e) jehož slova obsahují sudý počet jedniček
- f) jehož slova obsahují lichý počet jedniček

## Př. 7/3e: regulární výrazy

---

Napište regulární výraz pro jazyk nad abecedou  $\{0, 1\}$

- a) jehož slova obsahují pouze nuly
- b) jehož každé slovo obsahuje právě jedinou jedničku
- c) jehož každé slovo obsahuje alespoň jednu jedničku
- d) jehož každé slovo obsahuje alespoň dvě jedničky
- e) jehož slova obsahují sudý počet jedniček**
- f) jehož slova obsahují lichý počet jedniček



## Př. 7/3f: regulární výrazy

---

Napište regulární výraz pro jazyk nad abecedou  $\{0, 1\}$

- a) jehož slova obsahují pouze nuly
- b) jehož každé slovo obsahuje právě jedinou jedničku
- c) jehož každé slovo obsahuje alespoň jednu jedničku
- d) jehož každé slovo obsahuje alespoň dvě jedničky
- e) jehož slova obsahují sudý počet jedniček
- f) jehož slova obsahují lichý počet jedniček**

## Př. 7/4: nedeterministický automat: nuly a jedničky

---

Navrhněte NKA nad abecedou  $\{0, 1, 2\}$ , který v textu vyhledá všechny řetězce obsahující tři nuly a dvě jedničky.

## Př. 7/5: nedeterministický automat: abcd

---

Navrhněte NKA nad abecedou  $\{a, b, c, d\}$ , který v textu vyhledá všechny řetězce ve tvaru  $\#ba\#\#b\#$ , kde symbol  $\#$  představuje právě jeden libovolný znak z množiny  $\{a, b, d\}$ . Automat musí být schopen zpracovat celý text libovolné délky, tj. octnout se v koncovém stavu po přečtení posledního znaku každého výskytu hledaného řetězce.

## Př. 7/4: nedeterministický automat: nuly a jedničky

---

Navrhněte NKA nad abecedou  $\{0, 1, 2\}$ , který v textu vyhledá všechny řetězce obsahující tři nuly a dvě jedničky.

## Př. 7/5: nedeterministický automat: abcd

---

Navrhněte NKA nad abecedou  $\{a, b, c, d\}$ , který v textu vyhledá všechny řetězce ve tvaru  $\#ba\#\#b\#$ , kde symbol  $\#$  představuje právě jeden libovolný znak z množiny  $\{a, b, d\}$ . Automat musí být schopen zpracovat celý text libovolné délky, tj. octnout se v koncovém stavu po přečtení posledního znaku každého výskytu hledaného řetězce.

## Př. 7/6: automat z regulárního výrazu

---

Sestavte automat, který v textu nad abecedou  $\{a, b, c\}$  vyhledává všechna slova popsaná regulárním výrazem  $(ac^* + bb)^* a$ .

## Př. 7/7: uspořádaná slova

---

Mějme abecedu  $A = \{a, b, c, \dots, z\}$ . Pořadové číslo znaku  $a$  bude 1, pořadové číslo znaku  $b$  bude 2, atd., až pořadové číslo znaku  $z$  bude 26. Slovo nad  $A$  nazveme uspořádané, pokud pro každý jeho znak platí, že všechny znaky za ním ve slově následující mají vyšší pořadové číslo než tento znak. Sestavte NKA, který vyhledá v textu nad abecedou  $A$  všechna uspořádaná slova.



## Př. 7/6: automat z regulárního výrazu

---

Sestavte automat, který v textu nad abecedou  $\{a, b, c\}$  vyhledává všechna slova popsaná regulárním výrazem  $(ac^* + bb)^* a$ .

## Př. 7/5: nedeterministický automat: abcd

---

Navrhněte NKA nad abecedou  $\{a, b, c, d\}$ , který v textu vyhledá všechny řetězce ve tvaru  $\#ba\#\#b\#$ , kde symbol  $\#$  představuje právě jeden libovolný znak z množiny  $\{a, b, d\}$ . Automat musí být schopen zpracovat celý text libovolné délky, tj. octnout se v koncovém stavu po přečtení posledního znaku každého výskytu hledaného řetězce.

## Př. 7/4: nedeterministický automat: nuly a jedničky

---

Navrhněte NKA nad abecedou  $\{0, 1, 2\}$ , který v textu vyhledá všechny řetězce obsahující tři nuly a dvě jedničky.

## Př. 7/3f: regulární výrazy

---

Napište regulární výraz pro jazyk nad abecedou  $\{0, 1\}$

- a) jehož slova obsahují pouze nuly
- b) jehož každé slovo obsahuje právě jedinou jedničku
- c) jehož každé slovo obsahuje alespoň jednu jedničku
- d) jehož každé slovo obsahuje alespoň dvě jedničky
- e) jehož slova obsahují sudý počet jedniček
- f) jehož slova obsahují lichý počet jedniček**

## Př. 7/3e: regulární výrazy

---

Napište regulární výraz pro jazyk nad abecedou  $\{0, 1\}$

- a) jehož slova obsahují pouze nuly
- b) jehož každé slovo obsahuje právě jedinou jedničku
- c) jehož každé slovo obsahuje alespoň jednu jedničku
- d) jehož každé slovo obsahuje alespoň dvě jedničky
- e) jehož slova obsahují sudý počet jedniček**
- f) jehož slova obsahují lichý počet jedniček