PAL: 2. cvičení

Tomáš Sieger

1. 10. 2020

TEST

test

dota>lol

Organizace

- materiály, úlohy k řešení
  - samostatné řešení úloh (i dopředu)
  - konzultace
- aktivní účast
  - odevzdávání řešených úkolů **do ~~neděle~~** pondělí!
  - aktivita na cvičeních
- práce ve skupinách
  - volba skupinek?
  - “podmístnosti” v BBB
  - sdílené poznámky
  - dotazy v chatu v hlavní místnosti

Organizace

- materiály, úlohy k řešení
  - samostatné řešení úloh (i dopředu)
  - konzultace
- aktivní účast
  - odevzdávání řešených úkolů **do ~~neděle~~** pondělí!
  - aktivita na cvičeních
- práce ve skupinách
  - volba skupinek?
  - "podmístnosti" v BBB
  - sdílené poznámky
  - dotazy v chatu v hlavní místnosti

Př. 2 . Porovnání funkcí

$\log(n!)$	$O(n\log(n))$
$(\sqrt{2})^{\log(n)}$	$\sqrt{n}$
$2^{\log(\log(n))}$	$\log(n)$
$4^{\log(n)}$	n^2
$\sqrt{(\log(n))}$	$\sqrt{\log(n)}$
$n\log(n^2)$	$2n\log(n)$
$n\log(n)$	$n\log(n)$
$(\log(n))^2$	$(\log(n))^2$

$$\overbrace{\lg n + \lg(n-1) + \dots + \lg \tfrac{n}{2} + \dots + \lg 1}^{H(n) \leq n \lg n \;\in\; O(n \lg n)}$$

$n \geq 2k$

$$\lg n! = \underbrace{\lg n + \lg(n-1) + \dots + \lg \tfrac{n}{2}}_{D(n)} + \dots + \lg 1$$

$$D(n) \geq \frac{n}{2} \lg \frac{n}{2} = \frac{1}{2} n \lg n - \frac{1}{2} n \overset{?}{\geq} n \lg n$$

$$\frac{1}{2} n \lg n - \frac{n}{2} \overset{?}{\geq} \frac{1}{4} n \lg n$$

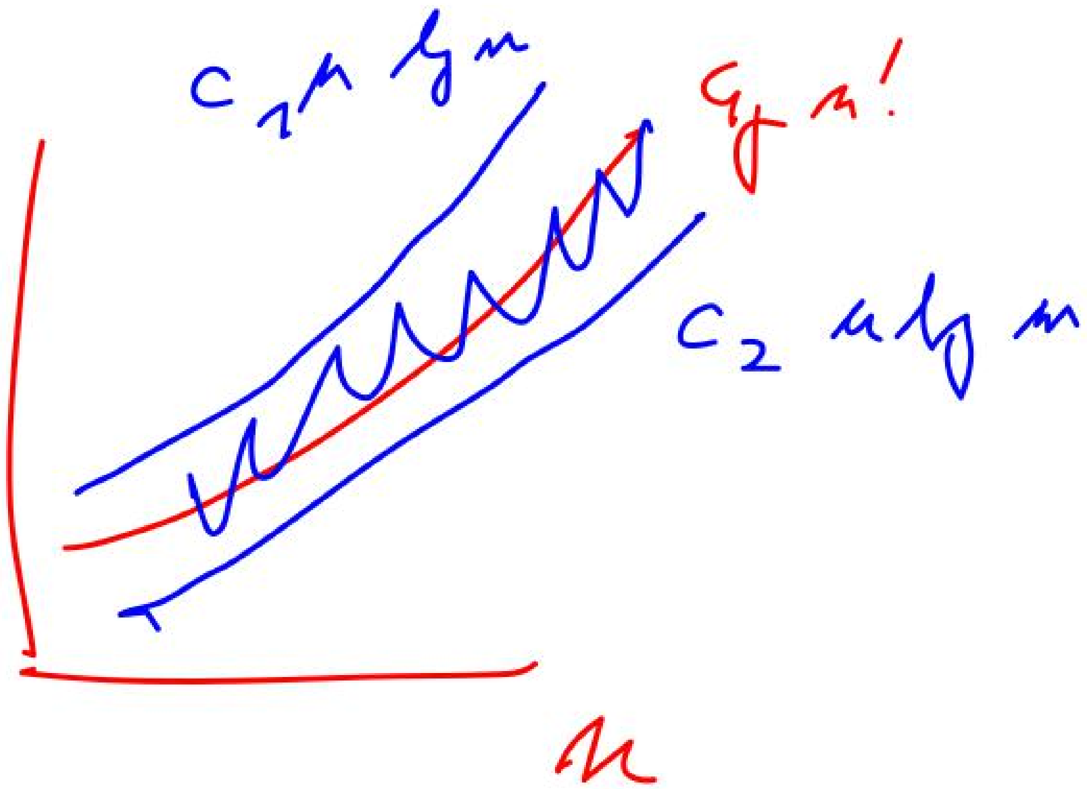
$$\frac{1}{4} n \lg n \overset{?}{\geq} \frac{n}{2} \quad | :n \;\; \cdot 4$$

$$\lg n \overset{?}{\geq} 2$$

$$n \overset{?}{\geq} 2^2$$

$$n \geq 4$$

$$\exists c = \frac{1}{4} \;\; \forall n > n_0 = 4 \;\; D(n) > c\, H(n)$$



$$n! \simeq \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$\lg n! \simeq \underline{\tfrac{1}{2}\lg 2\pi} + \tfrac{1}{2}\lg n + n\lg n - n\lg e$$

$$\tfrac{1}{2}\lg n + \underline{n\lg n} - cn \in \Theta(n\lg n)$$

$$\lg n! = \overbrace{\underbrace{\lg n + \lg(n-1) + \dots + \lg \frac{n}{2}}_{D(n)} + \dots + \lg 1}^{H(n) = \;\le n \lg n} \in O(n \lg n) \qquad n \ge 2$$

$$D(n) \ge \frac{n}{2} \lg \frac{n}{2} = \frac{1}{2} n \lg n - \frac{1}{2} n \overset{?}{\ge} \boxed{\ } \, n \lg n$$

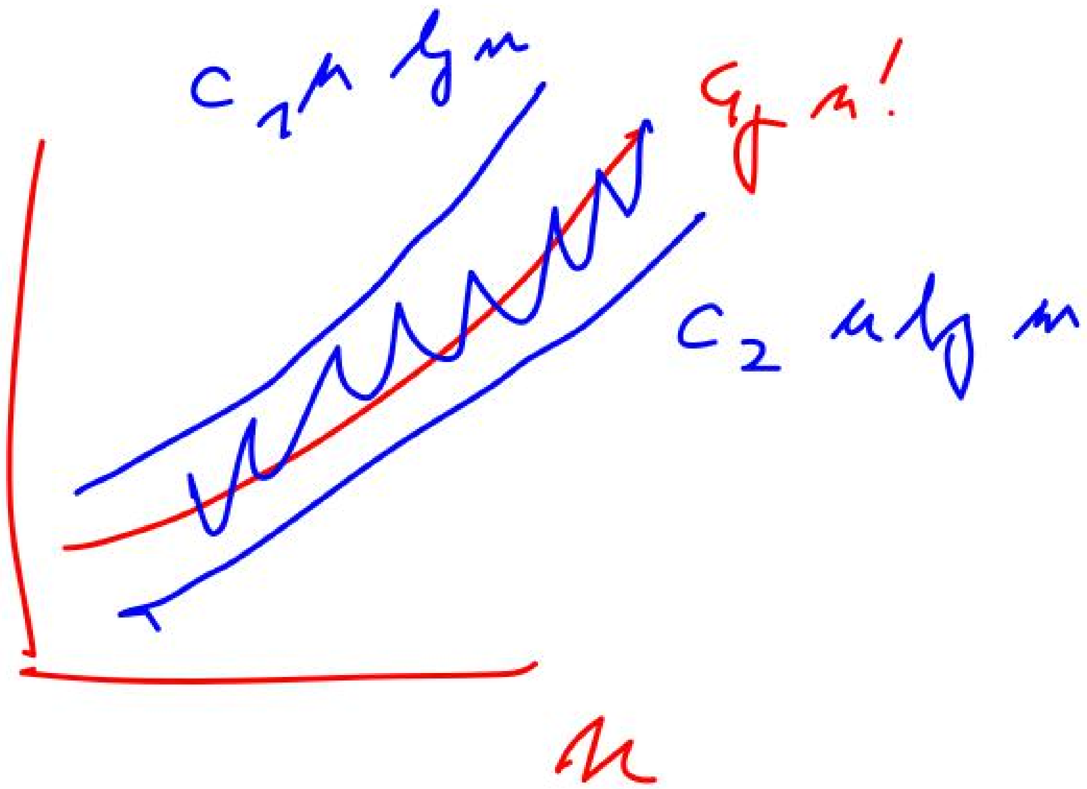
$$\frac{1}{2} n \lg n - \frac{n}{2} \overset{?}{\ge} \frac{1}{4} n \lg n$$

$$\frac{1}{4} n \lg n \overset{?}{\ge} \frac{n}{2} \quad \Big| : n, \cdot 4$$

$$\lg n \overset{?}{\ge} 2$$

$$n \ge 2^2$$

$$n \ge 4$$



$$\exists c = \frac{1}{4} \; \forall n \ge n_0 = 4 \; D(n) \ge c\, H(n)$$

$$\lg n! = \overbrace{\underbrace{\lg n + \lg(n-1) + \dots + \lg \tfrac{n}{2}}_{D(n)} + \dots + \lg 1}^{H(n) \,\le\, n \lg n \,\in\, O(n \lg n)}$$

$n \geq 2k$

$$D(n) \geq \frac{n}{2} \lg \frac{n}{2} = \frac{1}{2} n \lg n - \frac{1}{2} n \overset{?}{\geq} n \lg n$$

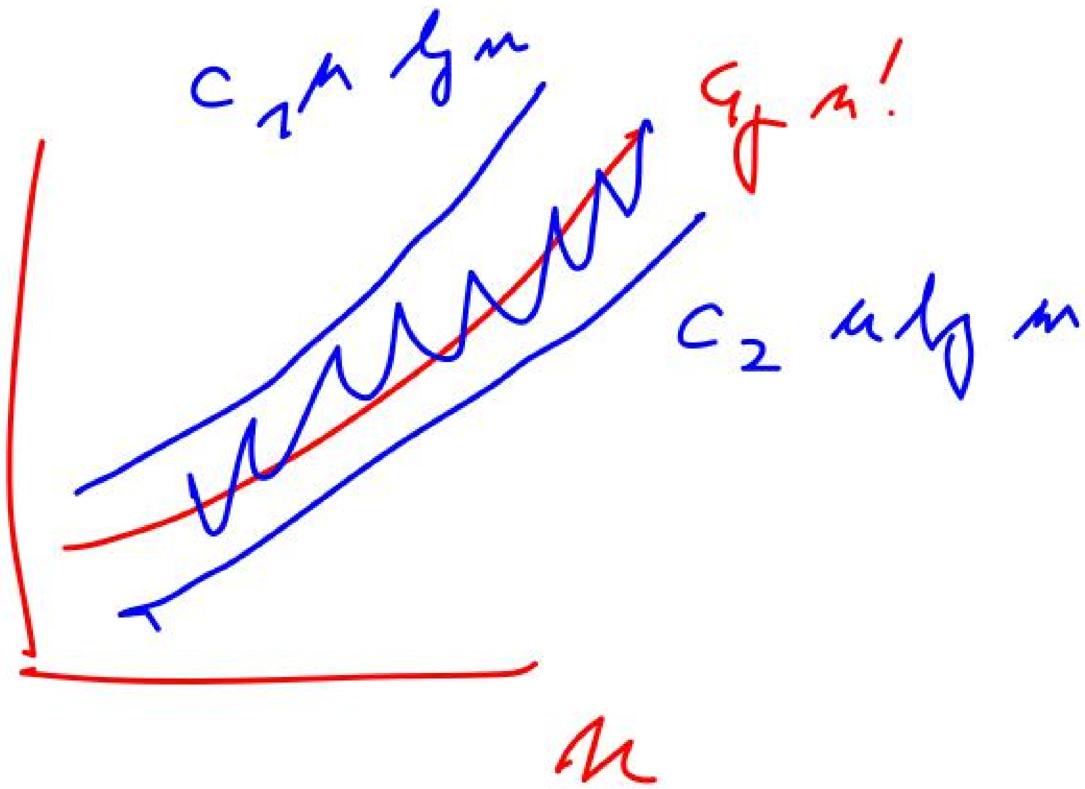
$$\frac{1}{2} n \lg n - \frac{n}{2} \overset{?}{\geq} \frac{1}{4} n \lg n$$

$$\frac{1}{4} n \lg n \overset{?}{\geq} \frac{n}{2} \qquad | : n \quad \cdot 4$$

$$\lg n \overset{?}{\geq} 2$$

$$n \overset{?}{\geq} 2^2$$

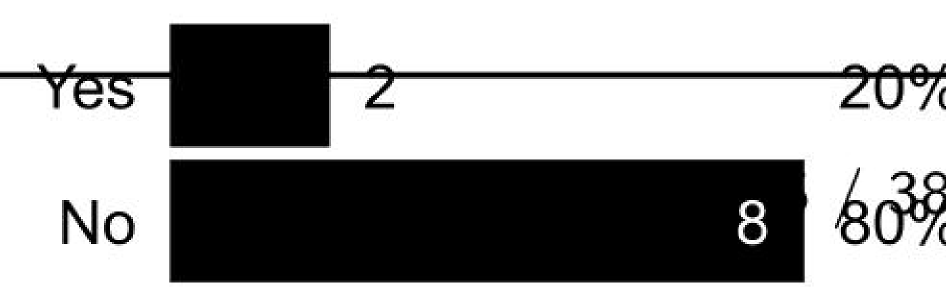
$$n \geq 4$$



$$\exists c = \frac{1}{4} \;\; \forall n \geq n_0 = 4 \;\; D(n) \geq c\, H(n)$$

Př. 2 . Porovnání funkcí

$\log(n!)$	$O(n\log(n))$
$(\sqrt{2})^{\log(n)}$	$\sqrt{n}$
$2^{\log(\log(n))}$	$\log(n)$
$4^{\log(n)}$	n^2
$\sqrt{(\log(n))}$	$\sqrt{\log(n)}$
$n\log(n^2)$	$2n\log(n)$
$n\log(n)$	$n\log(n)$
$(\log(n))^2$	$(\log(n))^2$



Př. 2 . Porovnání funkcí

$\log(n!)$	$\Theta(n\log(n))$
$(\sqrt{2})^{\log(n)}$	$\sqrt{n}$
$2^{\log(\log(n))}$	$\log(n)$
$4^{\log(n)}$	n^2
$\sqrt{(\log(n))}$	$\sqrt{\log(n)}$
$n\log(n^2)$	$2n\log(n)$
$n\log(n)$	$n\log(n)$
$(\log(n))^2$	$(\log(n))^2$

$(a^b)^c = a^{bc} = a^{cb} = (a^c)^b$

$(2^{\frac{1}{2}})^{\lg n}$

$(2^{\lg n})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}$

n

Př. 2 . Porovnání funkcí

		$n=2$
$\log(n!)$	$O(n\log(n))$	1
$(\sqrt{2})^{\log(n)}$	$\sqrt{n}$	1.4
$2^{\log(\log(n))}$	$\log(n)$	1
$4^{\log(n)}$	n^2	4
$\sqrt{(\log(n))}$	$\sqrt{\log(n)}$	1.41
$n\log(n^2)$	$2n\log(n)$	4
$n\log(n)$	$n\log(n)$	2
$(\log(n))^2$	$(\log(n))^2$	1

Př. 2 . Porovnání funkcí

		$n=2$
$\log(n!)$	$O(n\log(n))$	1
$(\sqrt{2})^{\log(n)}$	$\sqrt{n}$	1.4
$2^{\log(\log(n))}$	$\log(n)$	1
$4^{\log(n)}$	n^2	4
$\sqrt{(\log(n))}$	$\sqrt{\log(n)}$	1.41
$n\log(n^2)$	$2n\log(n)$	4
$n\log(n)$	$n\log(n)$	2
$(\log(n))^2$	$(\log(n))^2$	1

Př. 2 . Porovnání funkcí

		$n = 2$	$n = 2^{10}$
$\log(n!)$	$O(n\log(n))$	1	8769
$(\sqrt{2})^{\log(n)}$	$\sqrt{n}$	1.4	32
$2^{\log(\log(n))}$	$\log(n)$	1	10
$4^{\log(n)}$	n^2	4	1048576
$\sqrt{(\log(n))}$	$\sqrt{\log(n)}$	1.41	3.16
$n\log(n^2)$	$2n\log(n)$	4	20480
$n\log(n)$	$n\log(n)$	2	10240
$(\log(n))^2$	$(\log(n))^2$	1	100

Př. 2 . Porovnání funkcí

		$n = 2$	$n = 2^{10}$
$\log(n!)$	$O(n\log(n))$	1	8769
$(\sqrt{2})^{\log(n)}$	$\sqrt{n}$	1.4	32
$2^{\log(\log(n))}$	$\log(n)$	1	10
$4^{\log(n)}$	n^2	4	1048576
$\sqrt{(\log(n))}$	$\sqrt{\log(n)}$	1.41	3.16
$n\log(n^2)$	$2n\log(n)$	4	20480
$n\log(n)$	$n\log(n)$	2	10240
$(\log(n))^2$	$(\log(n))^2$	1	100

Př. 2 . Porovnání funkcí

		$n=2$	$n=2^{10}$	$n=2^{20}$
$\log(n!)$	$O(n\log(n))$	1	8769	19254028
$(\sqrt{2})^{\log(n)}$	$\sqrt{n}$	1.4	32	1024
$2^{\log(\log(n))}$	$\log(n)$	1	10	20
$4^{\log(n)}$	n^2	4	1048576	1.1010^{12}
$\sqrt{(\log(n))}$	$\sqrt{\log(n)}$	1.41	3.16	4.47
$n\log(n^2)$	$2n\log(n)$	4	20480	41943040
$n\log(n)$	$n\log(n)$	2	10240	20971520
$(\log(n))^2$	$(\log(n))^2$	1	100	400

Př. 2 . Porovnání funkcí

		$n = 2$	$n = 2^{10}$	$n = 2^{20}$
$\log(n!)$	$O(n\log(n))$	1	8769	19254028
$(\sqrt{2})^{\log(n)}$	$\sqrt{n}$	1.4	32	1024
$2^{\log(\log(n))}$	$\log(n)$	1	10	20
$4^{\log(n)}$	n^2	4	1048576	1.1010^{12}
$\sqrt{(\log(n))}$	$\sqrt{\log(n)}$	1.41	3.16	4.47
$n\log(n^2)$	$2n\log(n)$	4	20480	41943040
$n\log(n)$	$n\log(n)$	2	10240	20971520
$(\log(n))^2$	$(\log(n))^2$	1	100	400

Př. 2 . Porovnání funkcí

		$n=2$	$n=2^{10}$	$n=2^{20}$	$n=2^{100}$
$\log(n!)$	$O(n\log(n))$	1	8769	19254028	$\leq 1.2710^{32}$
$(\sqrt{2})^{\log(n)}$	$\sqrt{n}$	1.4	32	1024	1.110^{15}
$2^{\log(\log(n))}$	$\log(n)$	1	10	20	100
$4^{\log(n)}$	n^2	4	1048576	1.1010^{12}	1.6110^{60}
$\sqrt{(\log(n))}$	$\sqrt{\log(n)}$	1.41	3.16	4.47	10
$n\log(n^2)$	$2n\log(n)$	4	20480	41943040	2.5410^{32}
$n\log(n)$	$n\log(n)$	2	10240	20971520	1.2710^{32}
$(\log(n))^2$	$(\log(n))^2$	1	100	400	10000

Př. 2 . Porovnání funkcí

		$n = 2$	$n = 2^{10}$	$n = 2^{20}$	$n = 2^{100}$
$\log(n!)$	$O(n\log(n))$	1	8769	19254028	$\leq 1.2710^{32}$
$(\sqrt{2})^{\log(n)}$	$\sqrt{n}$	1.4	32	1024	1.110^{15}
$2^{\log(\log(n))}$	$\log(n)$	1	10	20	100
$4^{\log(n)}$	n^2	4	1048576	1.1010^{12}	1.6110^{60}
$\sqrt{(\log(n))}$	$\sqrt{\log(n)}$	1.41	3.16	4.47	10
$n\log(n^2)$	$2n\log(n)$	4	20480	41943040	2.5410^{32}
$n\log(n)$	$n\log(n)$	2	10240	20971520	1.2710^{32}
$(\log(n))^2$	$(\log(n))^2$	1	100	400	10000

$$H(n) =$$

$$n \geq 2$$

$$\lg n! = \overbrace{\underbrace{\lg n + \lg(n-1) + \dots + \lg \tfrac{n}{2}}_{D(n)} + \dots + \lg 1}^{\leq\, n \lg n} \in O(n \lg n)$$

$$D(n) \geq \frac{n}{2} \lg \frac{n}{2} = \frac{1}{2} n \lg n - \frac{1}{2} n \overset{?}{\geq} n \lg n$$

$$\frac{1}{2} n \lg n - \frac{n}{2} \overset{?}{\geq} \frac{1}{4} n \lg n \quad \Big| - \quad \Big| : n$$

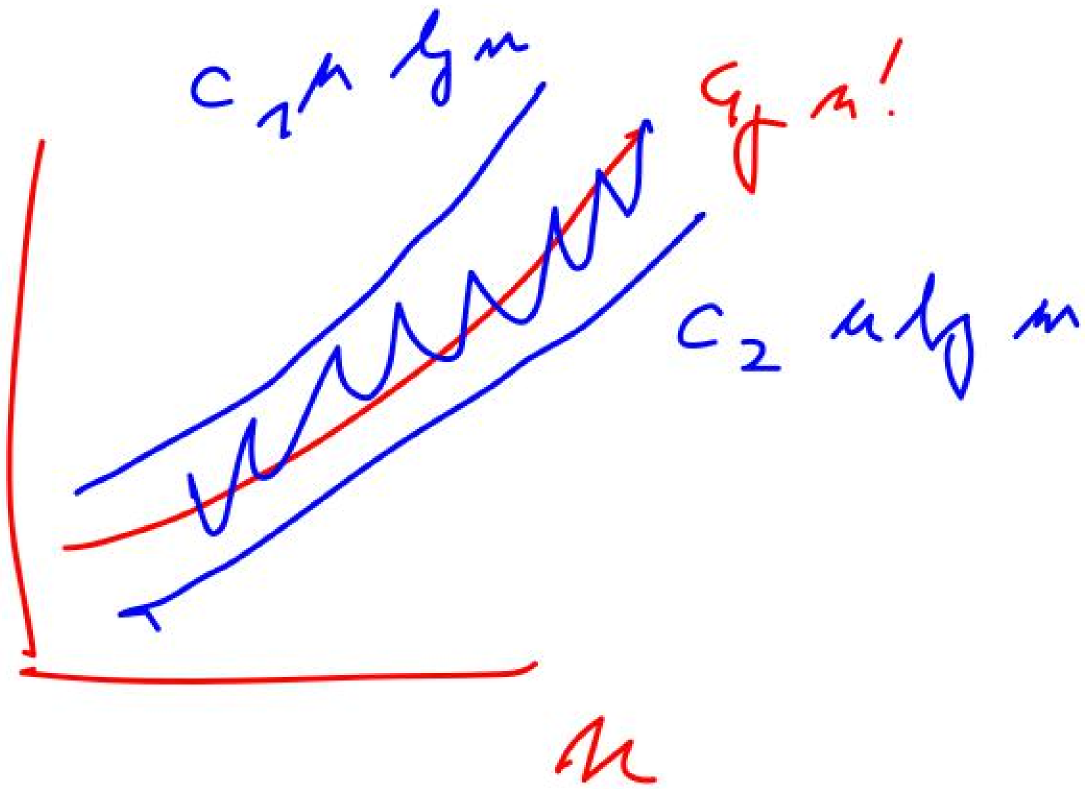
$$\frac{1}{4} n \lg n \overset{?}{\geq} \frac{n}{2} \quad \Big| \cdot 4$$

$$\lg n \overset{?}{\geq} 2$$

$$n \overset{?}{\geq} 2^2$$

$$\underline{\underline{n \geq 4}}$$

$$\exists\, c = \frac{1}{4}\ \forall n \geq n_0 = 4\ \ D(n) \geq c\, H(n)$$



$$H(n) = \; \leq n \lg n \; \in O(n \lg n)$$

$n \geq 2$

$$\lg n! = \overbrace{\underbrace{\lg n + \lg(n-1) + \dots + \lg \tfrac{n}{2}} + \dots + \lg 1}^{\leq n \lg n}$$

$$D(n) \geq \frac{n}{2} \lg \frac{n}{2} = \frac{1}{2} n \lg n - \frac{1}{2} n \overset{?}{\geq} \frac{1}{4} n \lg n$$

$$\frac{1}{2} n \lg n - \frac{n}{2} \overset{?}{\geq} \frac{1}{4} n \lg n \qquad \Big| -\tfrac{1}{4} n \lg n$$

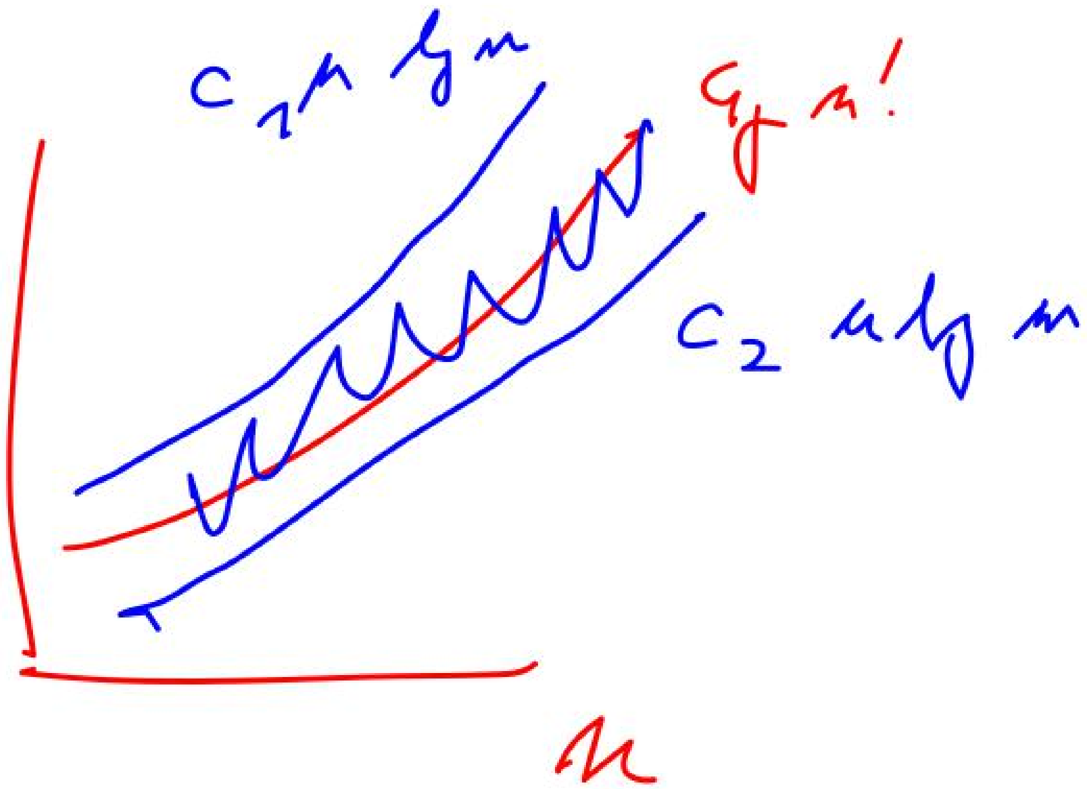
$$\frac{1}{4} n \lg n \overset{?}{\geq} \frac{n}{2} \qquad \Big| : n, \cdot 4$$

$$\lg n \overset{?}{\geq} 2$$

$$n \overset{?}{\geq} 2^2$$

$$\underline{\underline{n \geq 4}}$$

$$\exists c = \frac{1}{4} \; \forall n \geq n_0 = 4 \; D(n) \geq c \, H(n)$$

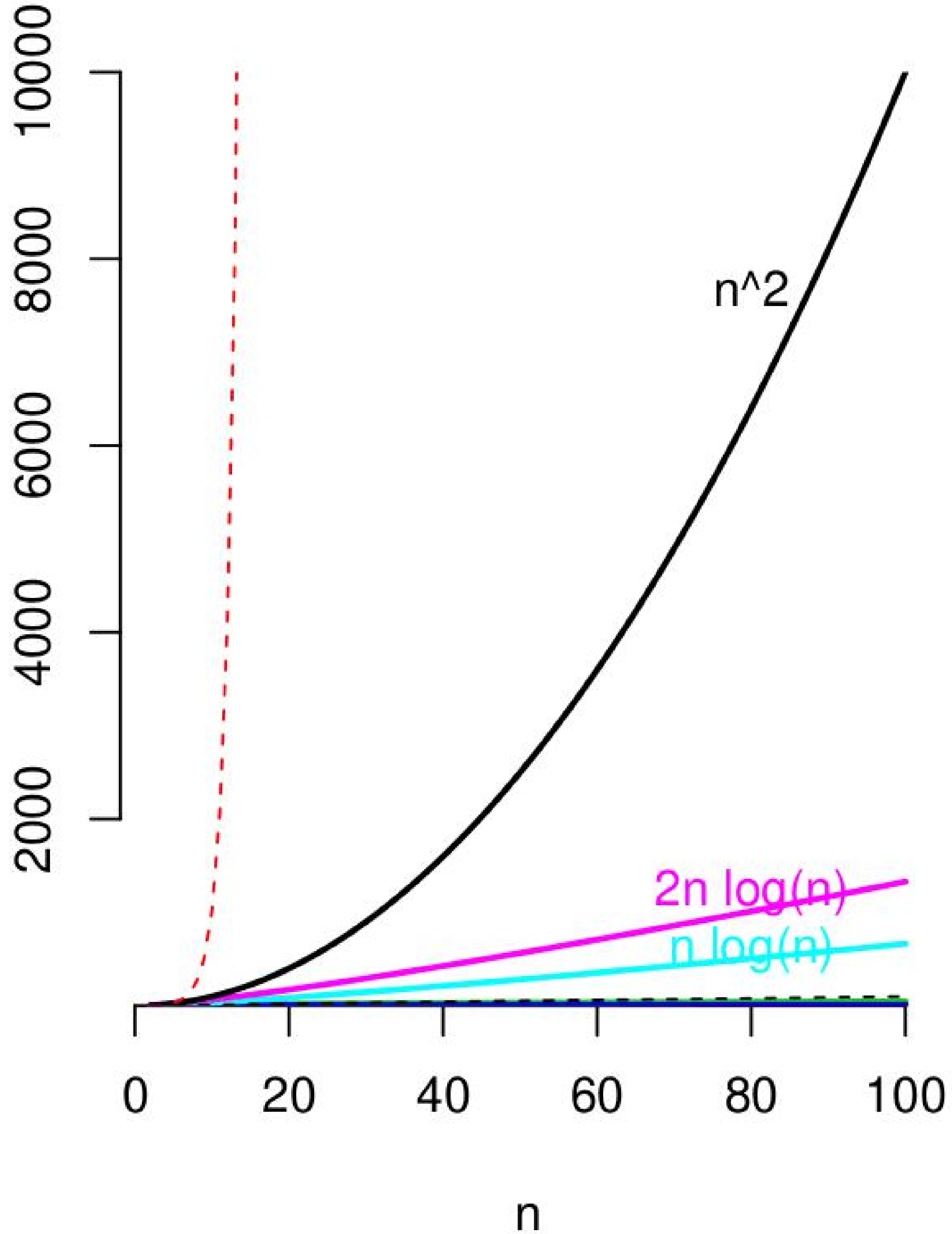


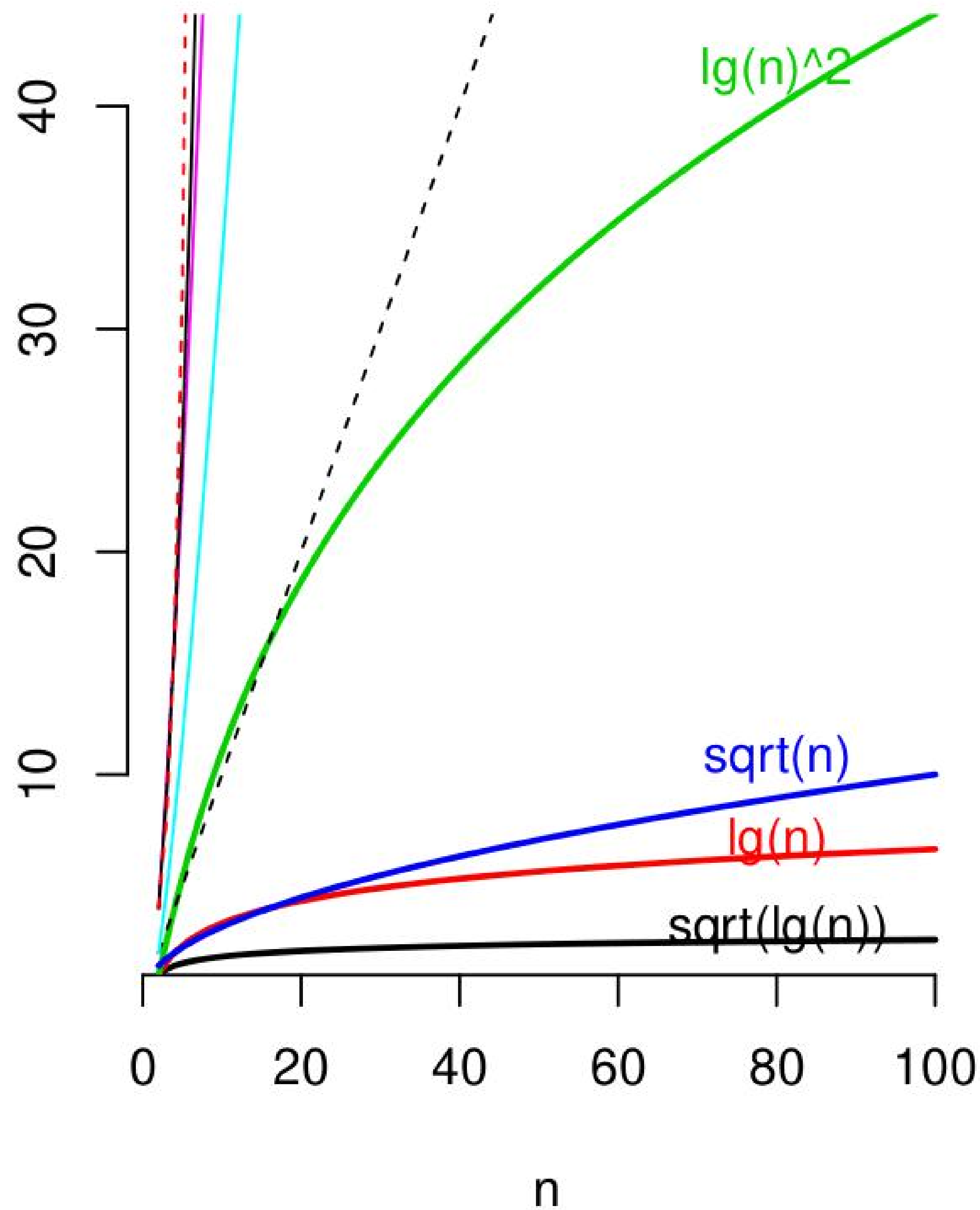
$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$\lg n! \approx \underline{\frac{1}{2}\lg 2\pi} + \frac{1}{2}\lg n + n\lg n - n\lg e$$

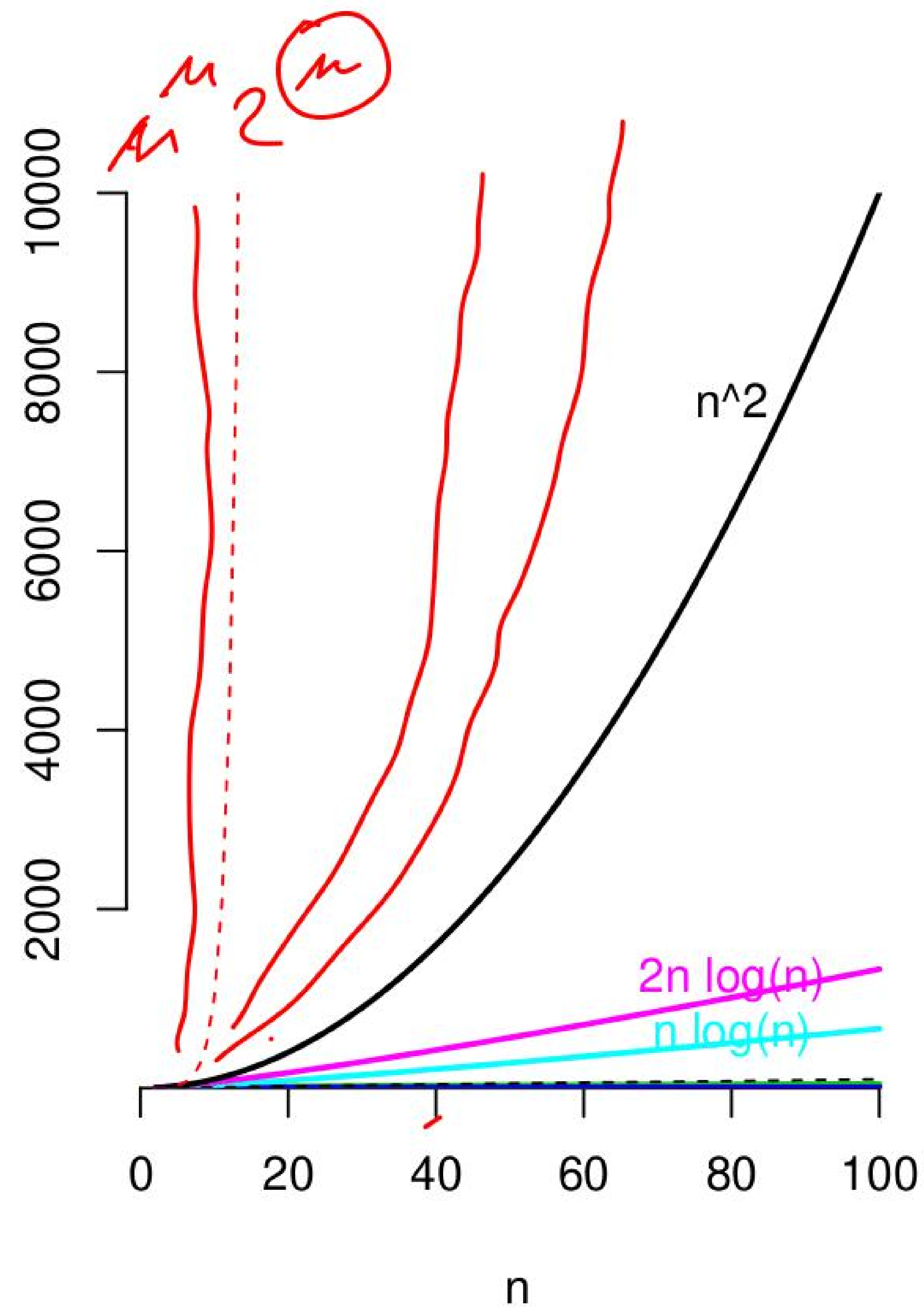
$$\frac{1}{2}\lg n + \underline{n\lg n} - cn \in \Theta(n\lg n)$$

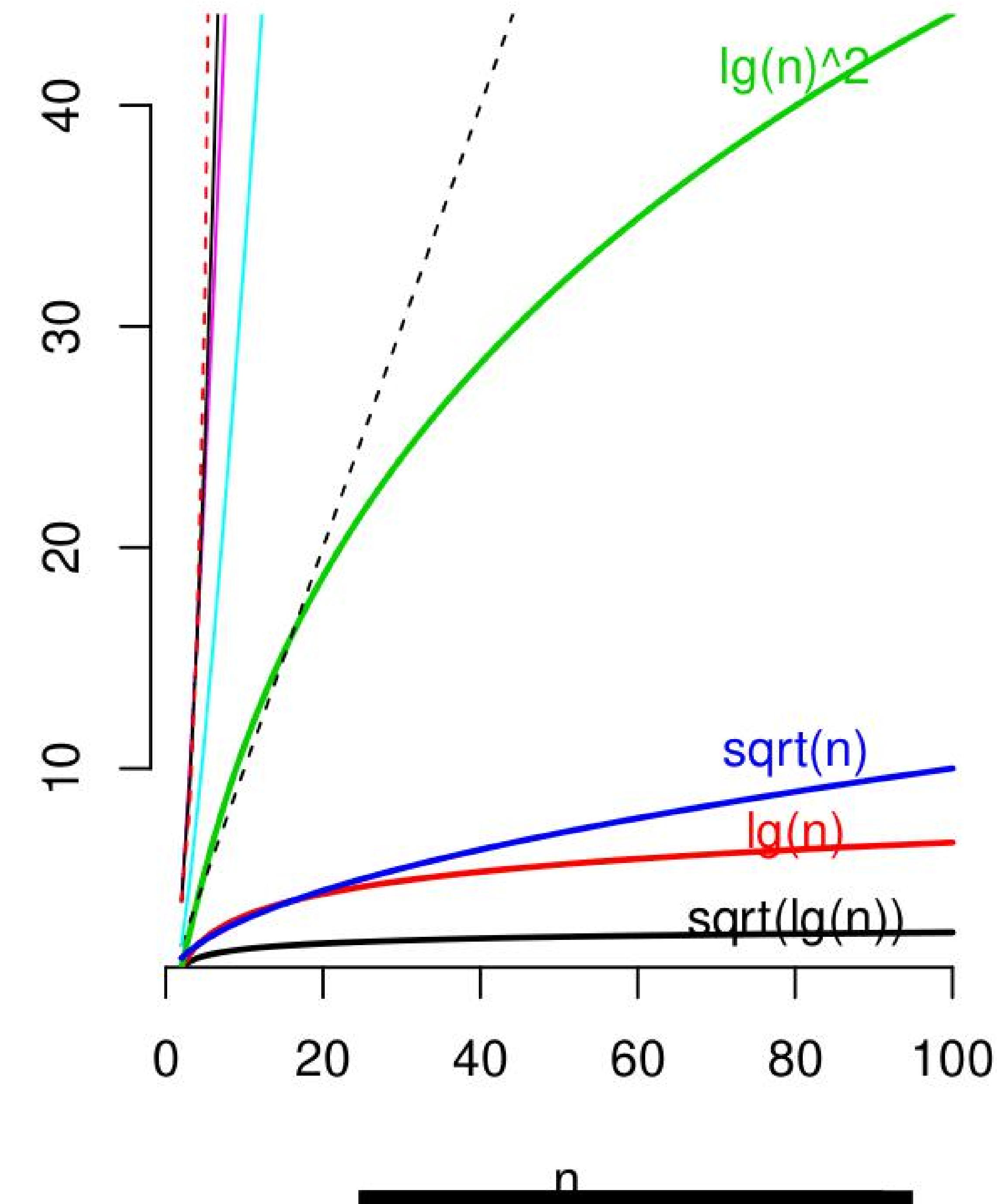
Př. 2 . Porovnání funkcí (2)

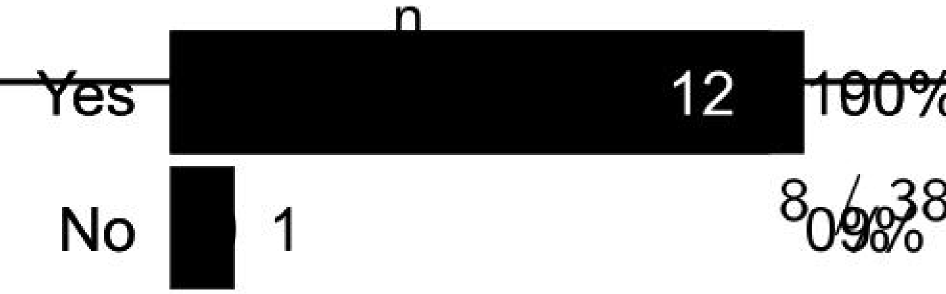




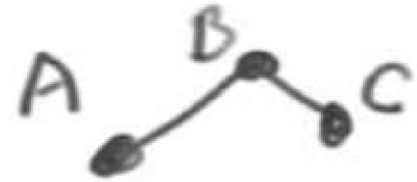
Př. 2 . Porovnání funkcí (2)







Př. 5. Převody grafových reprezentací



$G = (V, E)$, $n = |V|$, $m = |E|$

$$\begin{array}{c|ccc} & A & B & C \\ \hline A & 0 & 1 & 0 \\ B & & 0 & 1 \\ C & & & 0 \end{array}$$

I

$$\begin{array}{c|ccc} & A & B & C \\ \hline e_1 & 1 & 1 & 0 \\ e_2 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

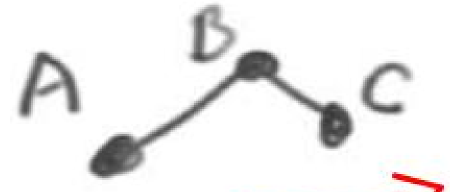
II

A -> B
B -> A, C
C -> B

III

	I -> II	II -> I	I -> III	III -> I	II -> III	III -> II
$O(n)$						
$O(m)$						
$O(n^2)$						
$O(nm)$						
$O(n^2 m)$						
$O(n^2 + m)$						
$O(n^2 + nm)$						
$O(n^3)$						
$O(n^4)$						

Př. 5. Převody grafových reprezentací



$G=(V,E)$, $n=|V|=3$, $m=|E|=2$

$\Omega\binom{n}{2}$ $\Theta(n^2)$

$$\begin{array}{c|ccc} & A & B & C \\ \hline A & 0 & 1 & 0 \\ B & & 0 & 1 \\ C & & & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} & A & B & C \\ \hline e_1 & 1 & 1 & 0 \\ e_2 & 0 & 1 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} A \to B \\ B \to A, C \\ C \to B \end{array}$$

n → n, m, n, m, m

I — m. sousednosti

II — m. incidence — $O(n\cdot m)$

III — seznam sousedů — $O(n+m)$

	I → II	II → I	I → III	III → I	II → III	III → II
$O(n)$						
$O(m)$						
$O(n^2)$						
$O(nm)$						
$O(n^2 m)$						
$O(n^2+m)$						
$O(n^2+nm)$						
$O(n^3)$						
$O(n^4)$						

Yes 13 100%

No 0 0%

Př. 8. Volba algoritmu

A1: $O(n\ m\ log(n))$
A2: $O((n^2 log(m))$
Který je "lepší"?

Př. 8. Volba algoritmu

A1: $O(n\ m\ log(n))$
A2: $O((n^2 log(m))$
Který je "lepší"?

A_1 $O(n\ m\ lg(n))$ A_2 $O(n^2 lg(m))$

$n, m = 2$ $O(n\ lg(n))$ $<$ $O(n^2 lg\, m)$
$O(n^2)$

$n, m = \binom{n}{2}$ $O(n^3 lg\, n)$ $>$ $O(n^2 lg(n^2))$
$O(n^2)$ $O(2n^2 lg\, n)$

$m = n$ $O(n^2 lg\, n) = O(n^2 lg\, n)$

Yes	13	100%
No	0	0%

14 / 38

Př. 1: násobení cen hran

(A) V grafu k ceně každé hrany přičteme stejnou nenulovou konstantou c.
(B) V grafu vynásobíme ceny všech hran stejnou nenulovou konstantou c.
V jakém vztahu budou minimální kostry původního a upraveného grafu v případech (A) a (B)? (Předpokládejte, že původní minimální kostra je určena jednoznačně.)

Př. 1: násobení cen hran

(A) V grafu k ceně každé hrany přičteme stejnou nenulovou konstantou c. A

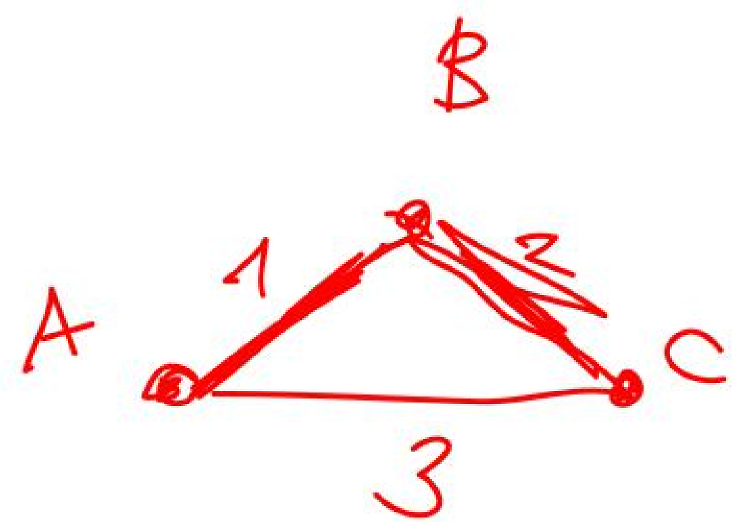
(B) V grafu vynásobíme ceny všech hran stejnou nenulovou konstantou c. B

V jakém vztahu budou minimální kostry původního a upraveného grafu v případech (A) a (B)? (Předpokládejte, že původní minimální kostra je určena jednoznačně.)

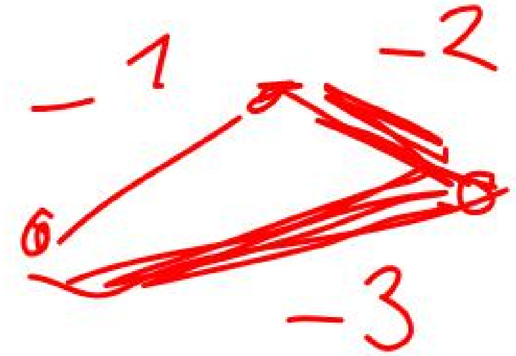
$c(k) = C$

$c(k_A) = C + c_A(n-1)$

$c(k_B) = C \cdot c_B$



$C = 3$



-5

Yes	13	100%
No	0	0%

18 / 38

Př. 2: omezená kostra

Máme najít kostru grafu, nikoli nutně minimální, s tím, že je předepsáno, že cena každé hrany hledané kostry musí ležet v daném intervalu $< c1, c2 >$. Je nutno použít algoritmus pro hledání minimální kostry nebo stačí nějaký jednodušší postup?

Př. 2: omezená kostra

Máme najít kostru grafu, nikoli nutně minimální, s tím, že je předepsáno, že cena každé hrany hledané kostry musí ležet v daném intervalu $< c1, c2 >$. Je nutno použít algoritmus pro hledání minimální kostry nebo stačí nějaký jednodušší postup?

DFS, BFS

$O(n+m)$

$O(n^2)$

Jarník

$O(nm)$ $\quad O(n^3)$

$O(n^2)$

$O(m + n \log n)$ Fib. h.

$O(m \log n)$ bin. h.

$O((m + n) \log n)$

$(m+n)$

Yes	12	92%
No	1	7%

21 / 38

Př. 2: omezená kostra

Máme najít kostru grafu, nikoli nutně minimální, s tím, že je předepsáno, že cena každé hrany hledané kostry musí ležet v daném intervalu $< c1, c2 >$. Je nutno použít algoritmus pro hledání minimální kostry nebo stačí nějaký jednodušší postup?

DFS, BFS

$O(n+m)$

$O(n^2)$

Jarník

$O(nm)$ $O(n^3)$

$O(n^2)$

$O(m + n \log n)$ Fib. h.

$O(m \log n)$ bin. h.

$O((n + m) \log n)$

$(m+n)$