PAL: 12. cvičení

Tomáš Sieger

10. 12. 2020

Opakování z minula

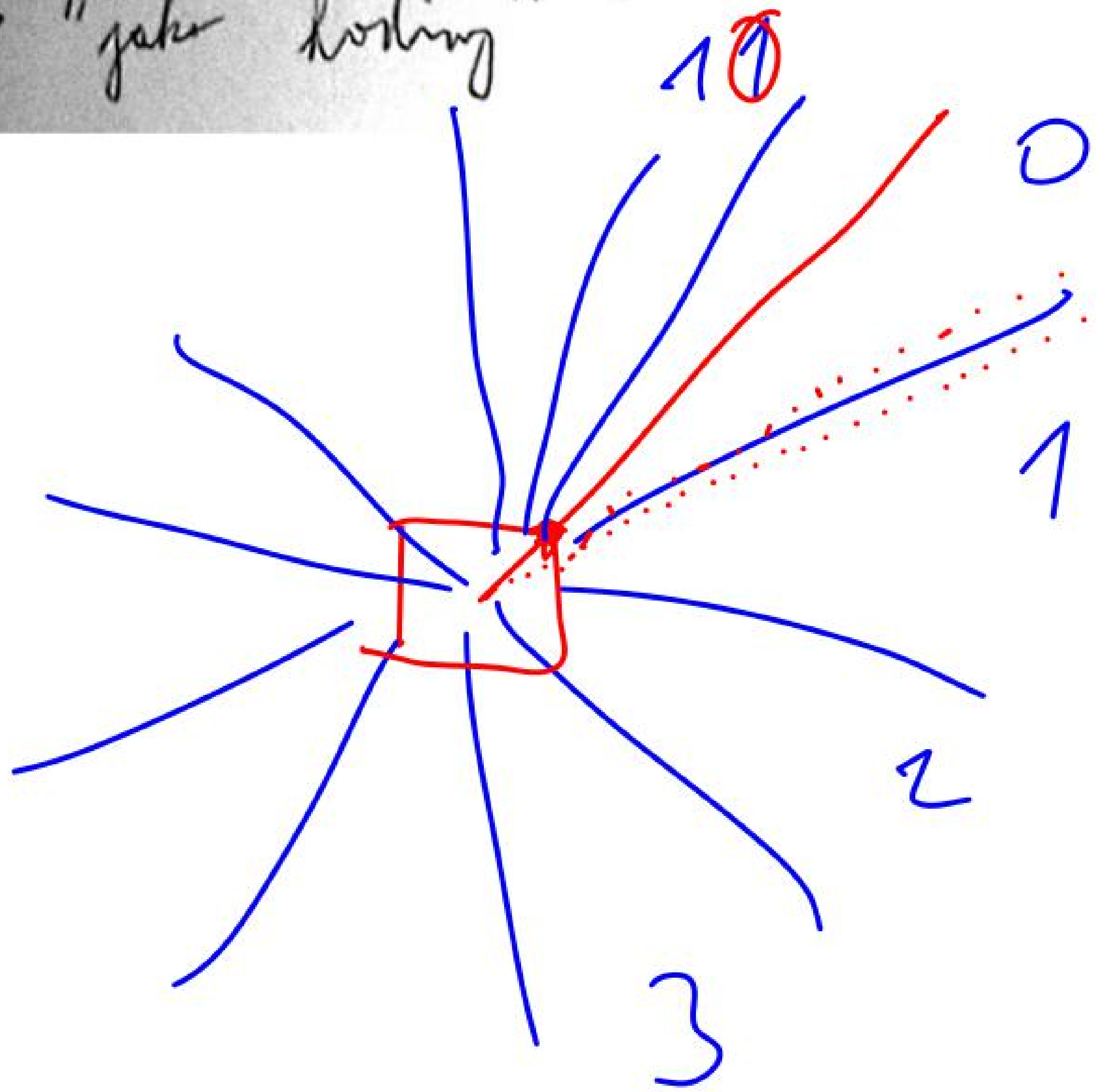
Př. 10/2: náhodná čísla

Máte jednu hrací kostku. Popište, jak využijte házení kostkou tak, abyste měli generátor náhodných celých čísel v rozmezí $0 \ldots 10$. Všechna čísla $0, 1, 2, \ldots 10$ musí být generována se stejnou pravděpodobností.

Podle dopadu kostky, kam míří jeden roh (rozdělím kružnici na 11 dílů)
↳ "jako kostky"

Podle dopadu kostky, kam míří jeden roh (rozdělím prostor na 11 dílů)

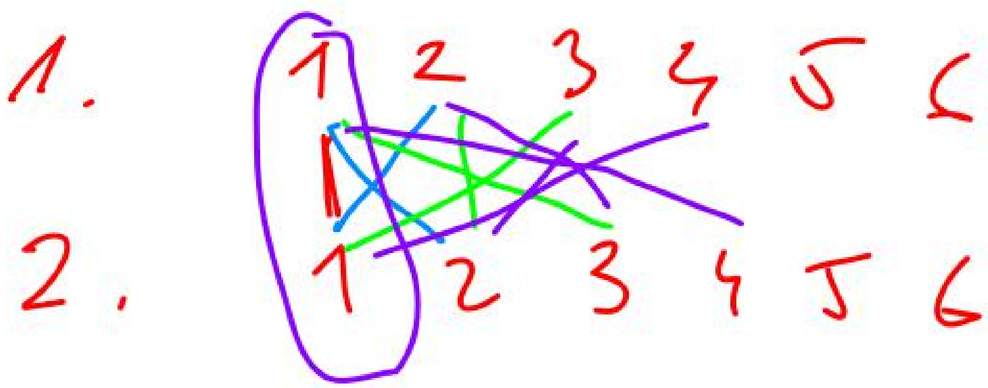
↳ "jako hodiny"

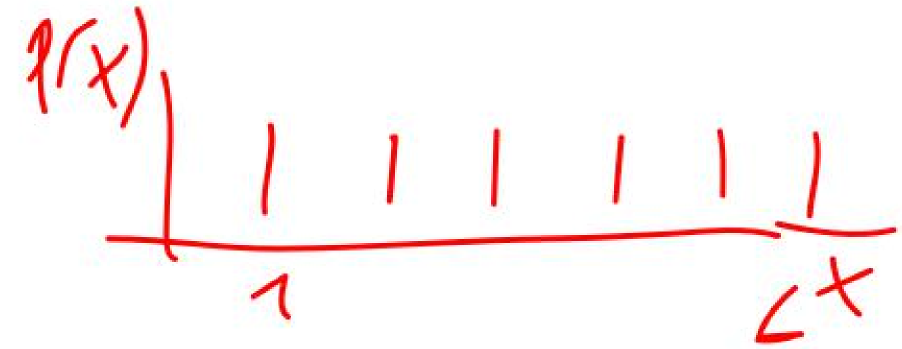


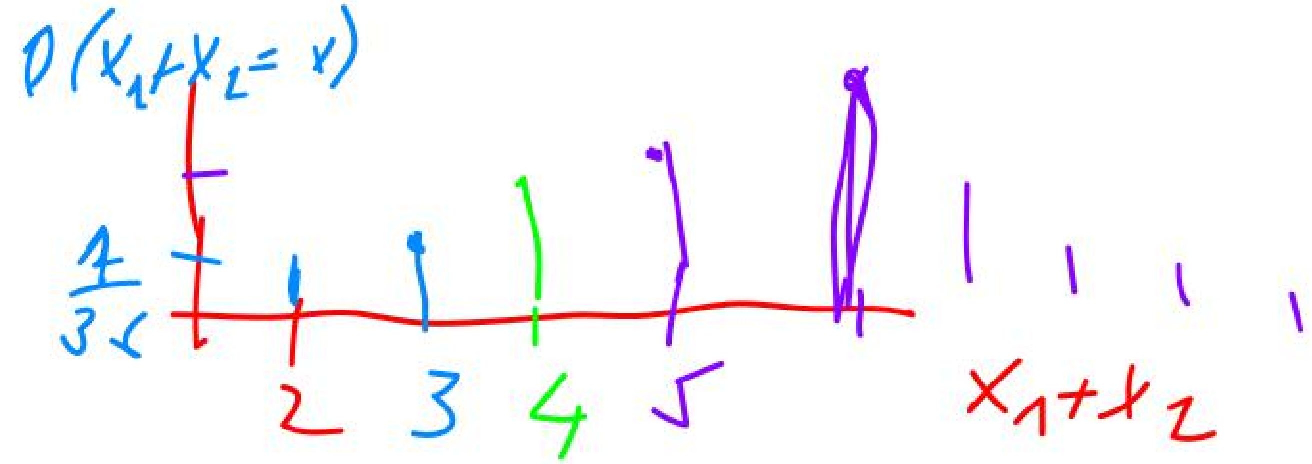
Yes	5	100%	
No	0	0%	4/28

Hodím 10x kostkou, hodnoty sčítám modulo 11.

Hodím 10x kostkou, hodnoty sečtu modulo 11.



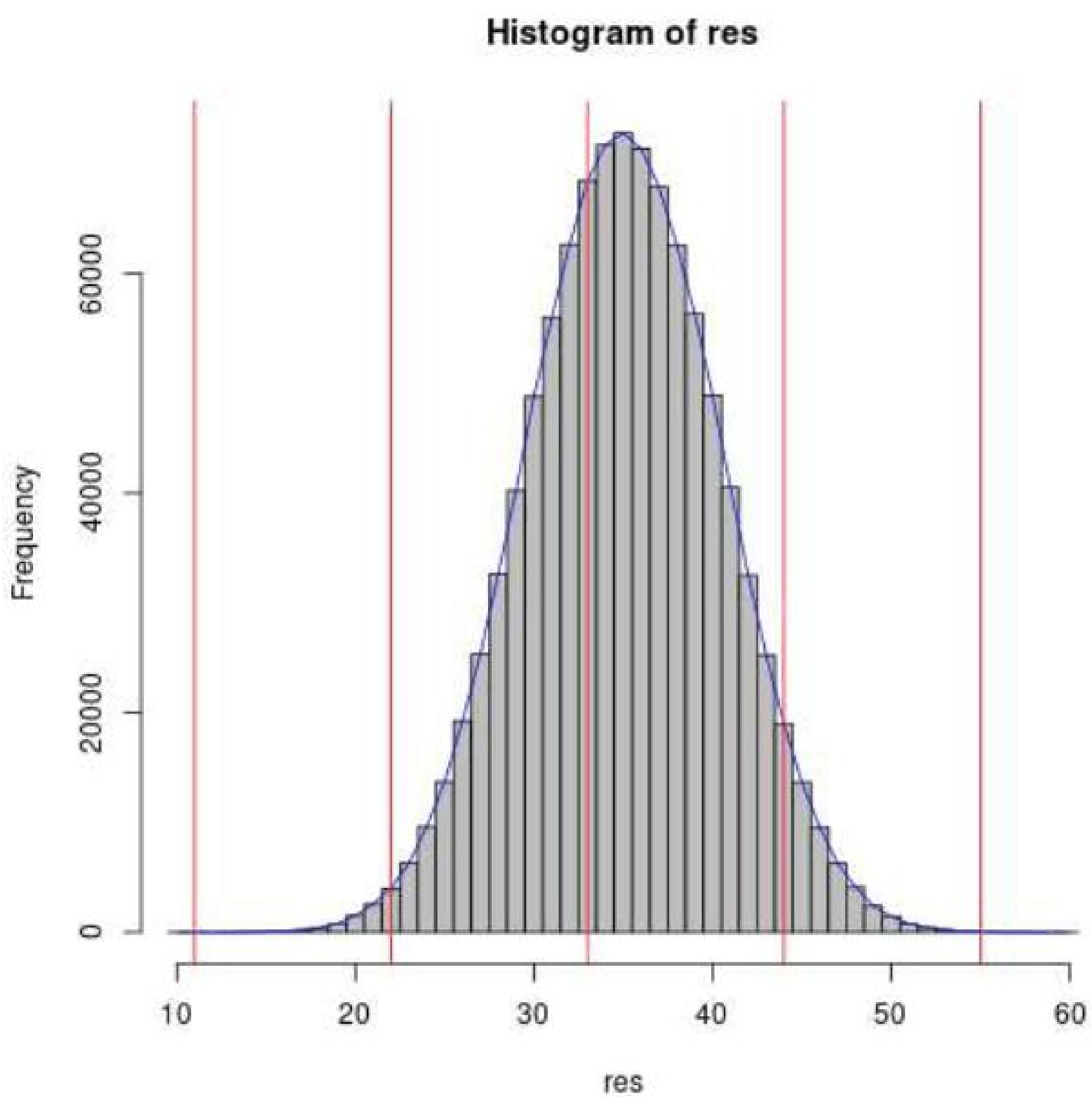


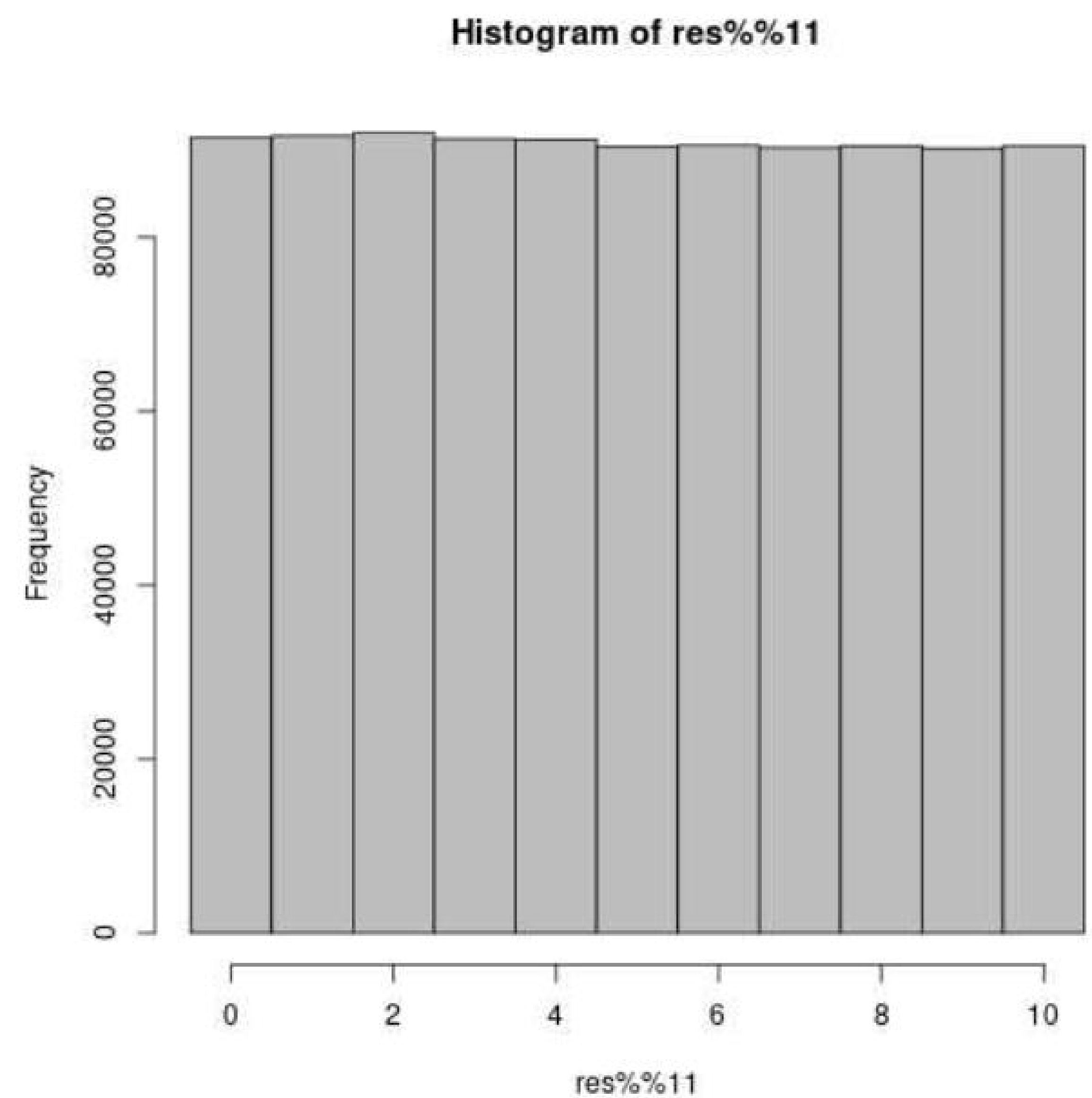


Yes	2	33%
No	4	66%

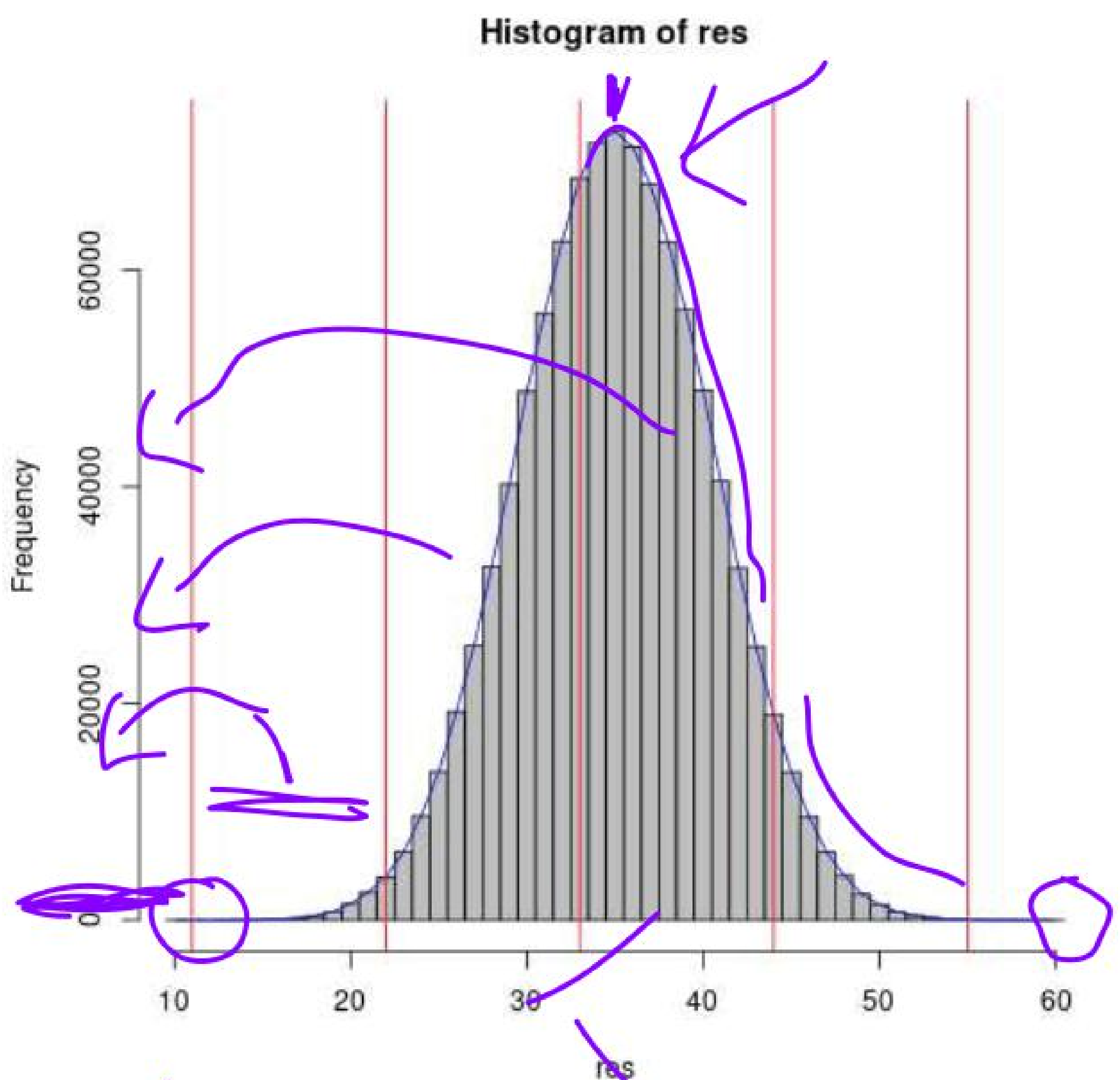
/ 28

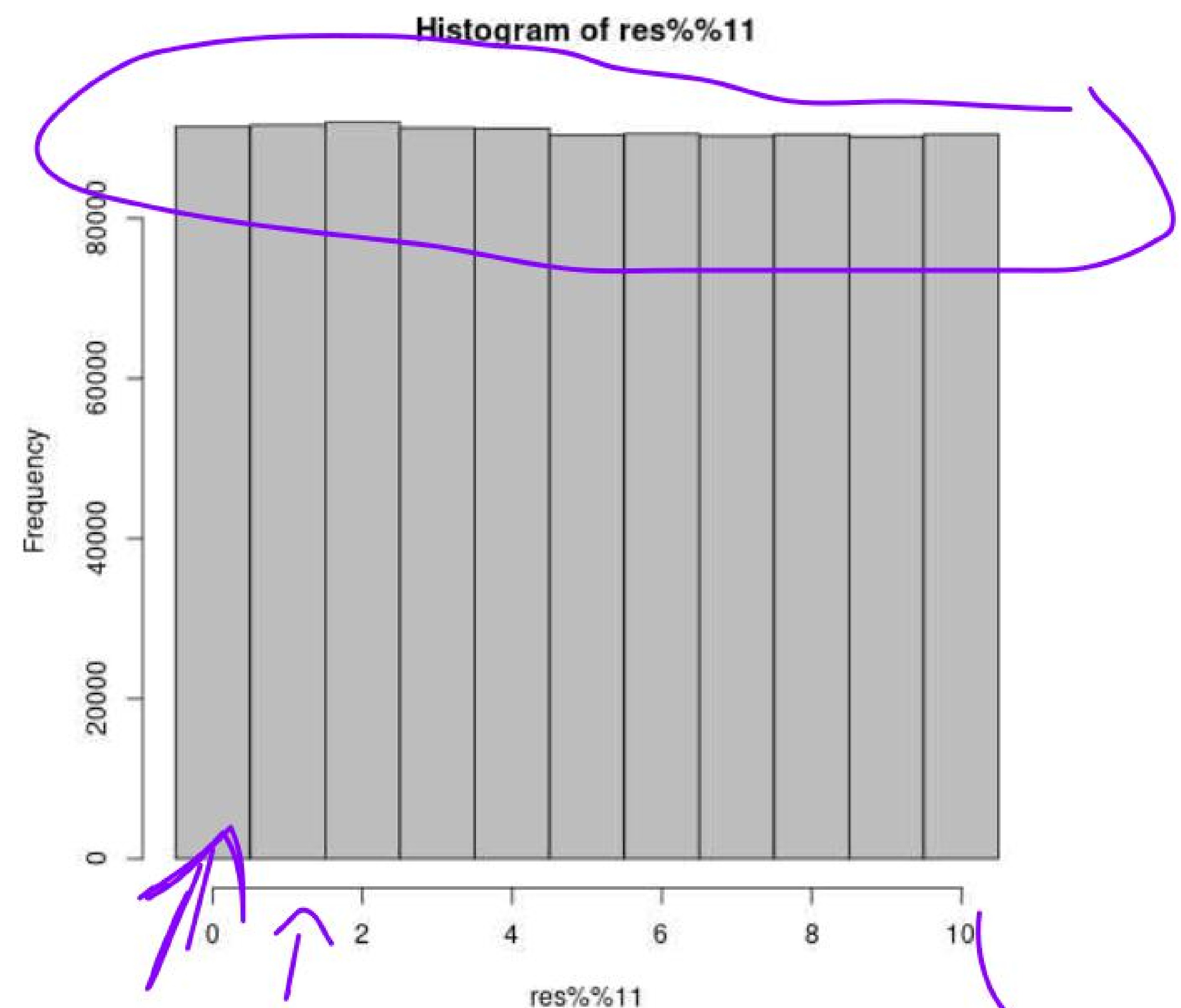
Hodím 10x kostkou, hodnoty sečtu modulo 11.





Hodím 10x kostkou, hodnoty sečtu modulo 11.

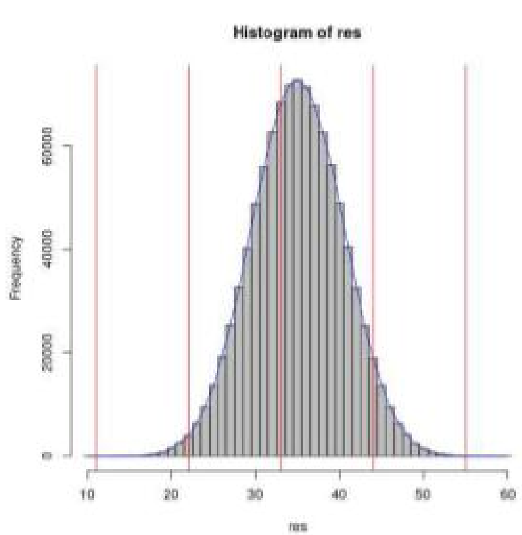


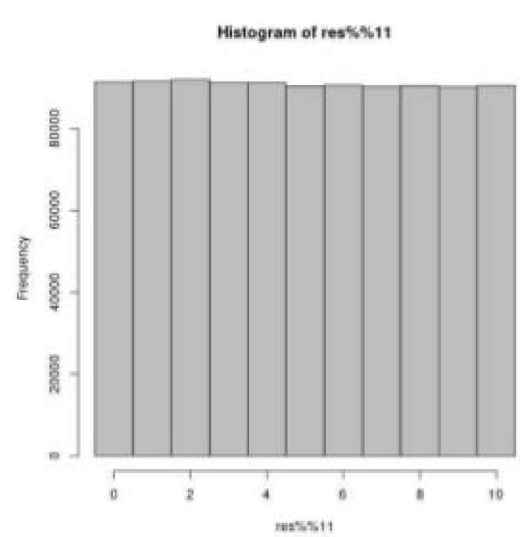


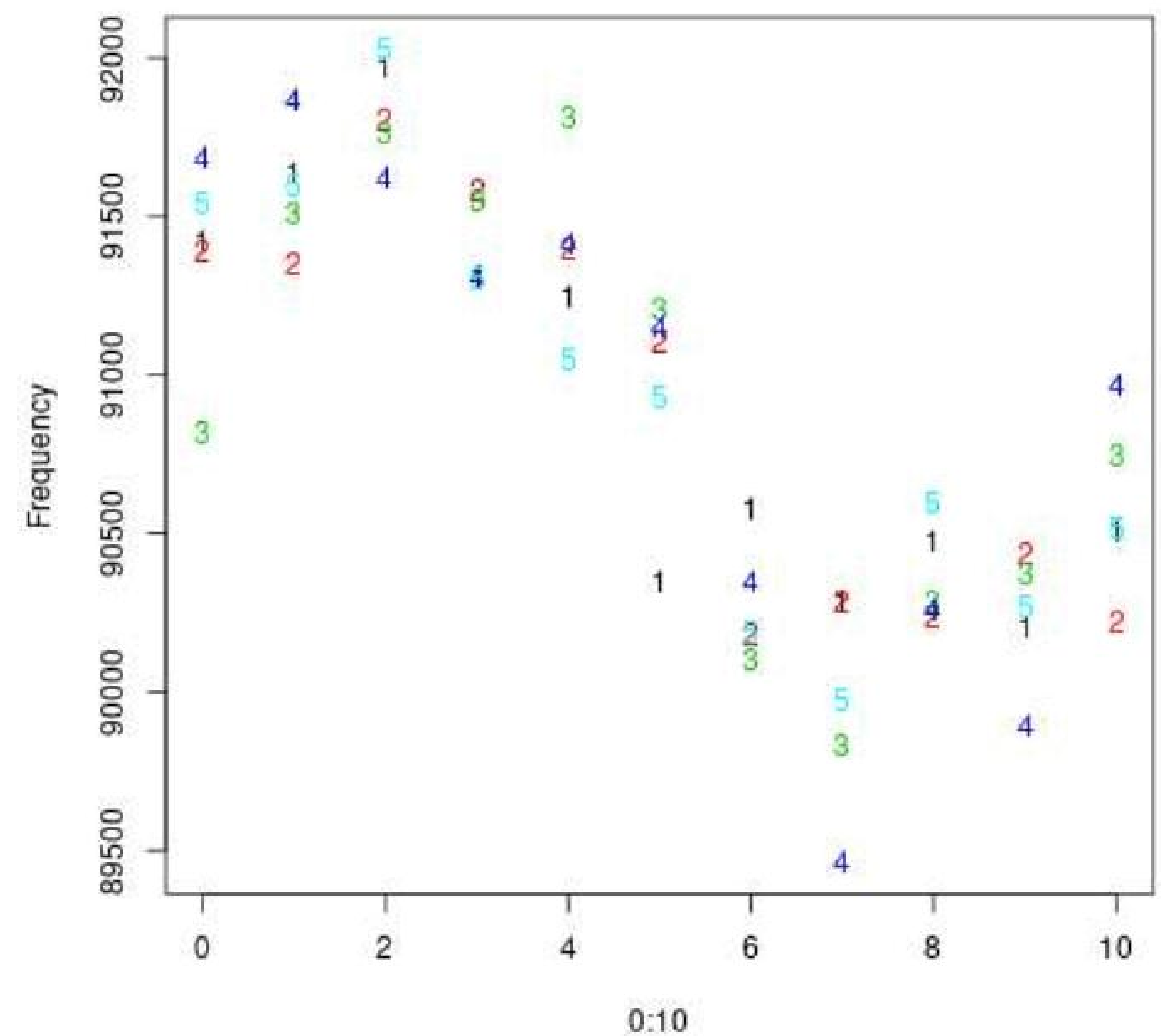
0 1 2 10

11 12 10
22 23 32
33 34 43
44 45 54
55 56

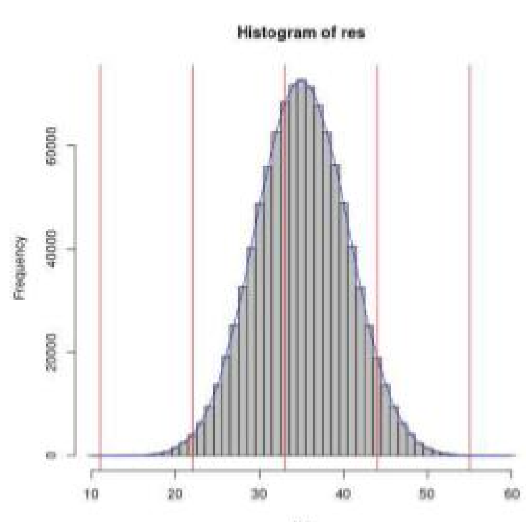
Hodím 10x kostkou, hodnoty sečtu modulo 11.

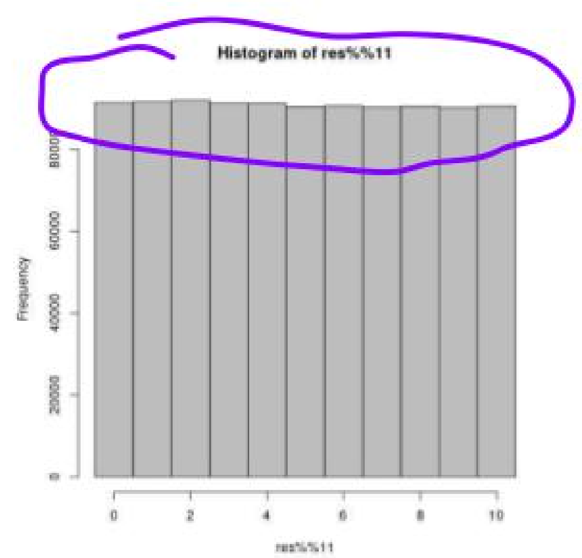


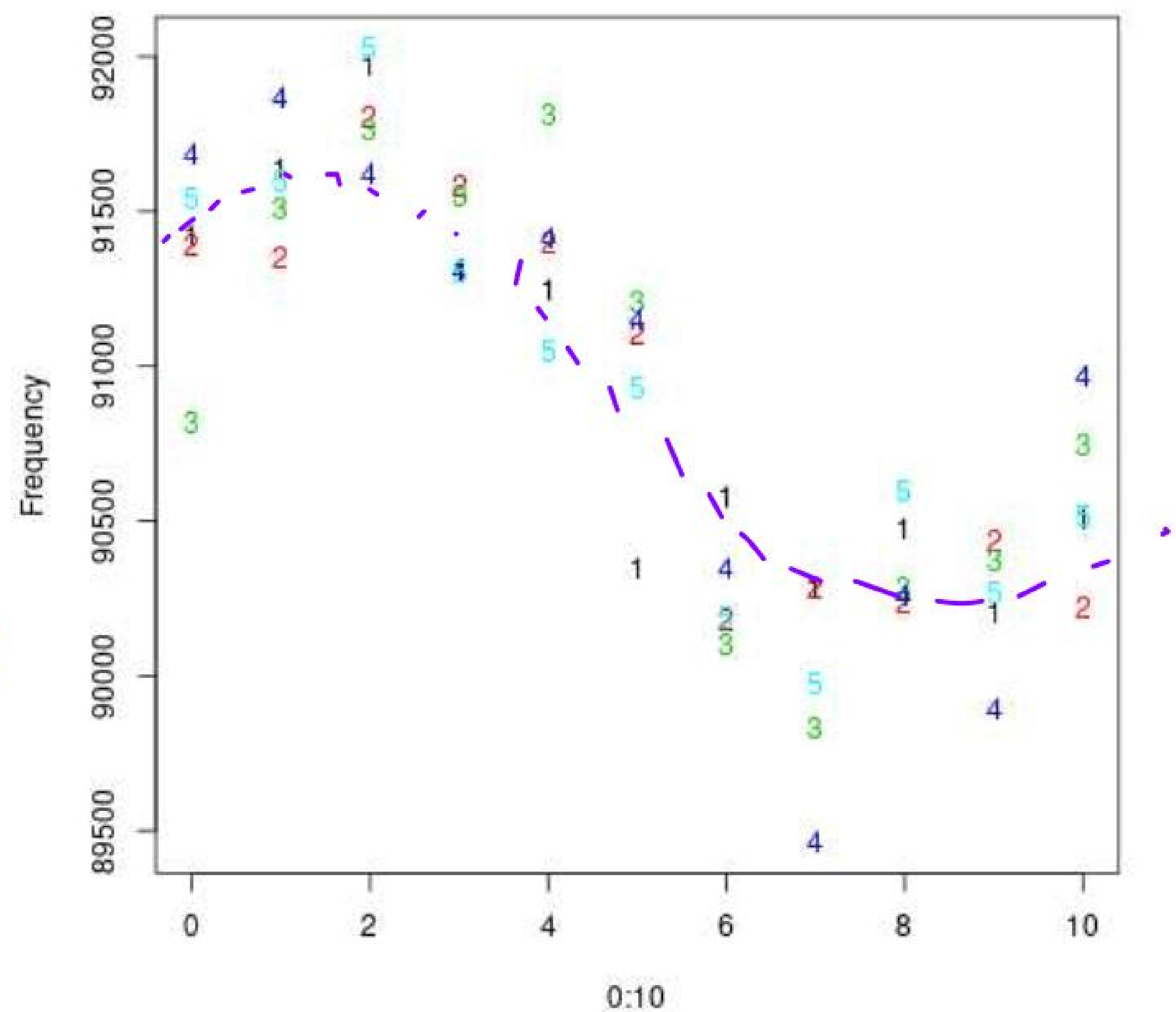




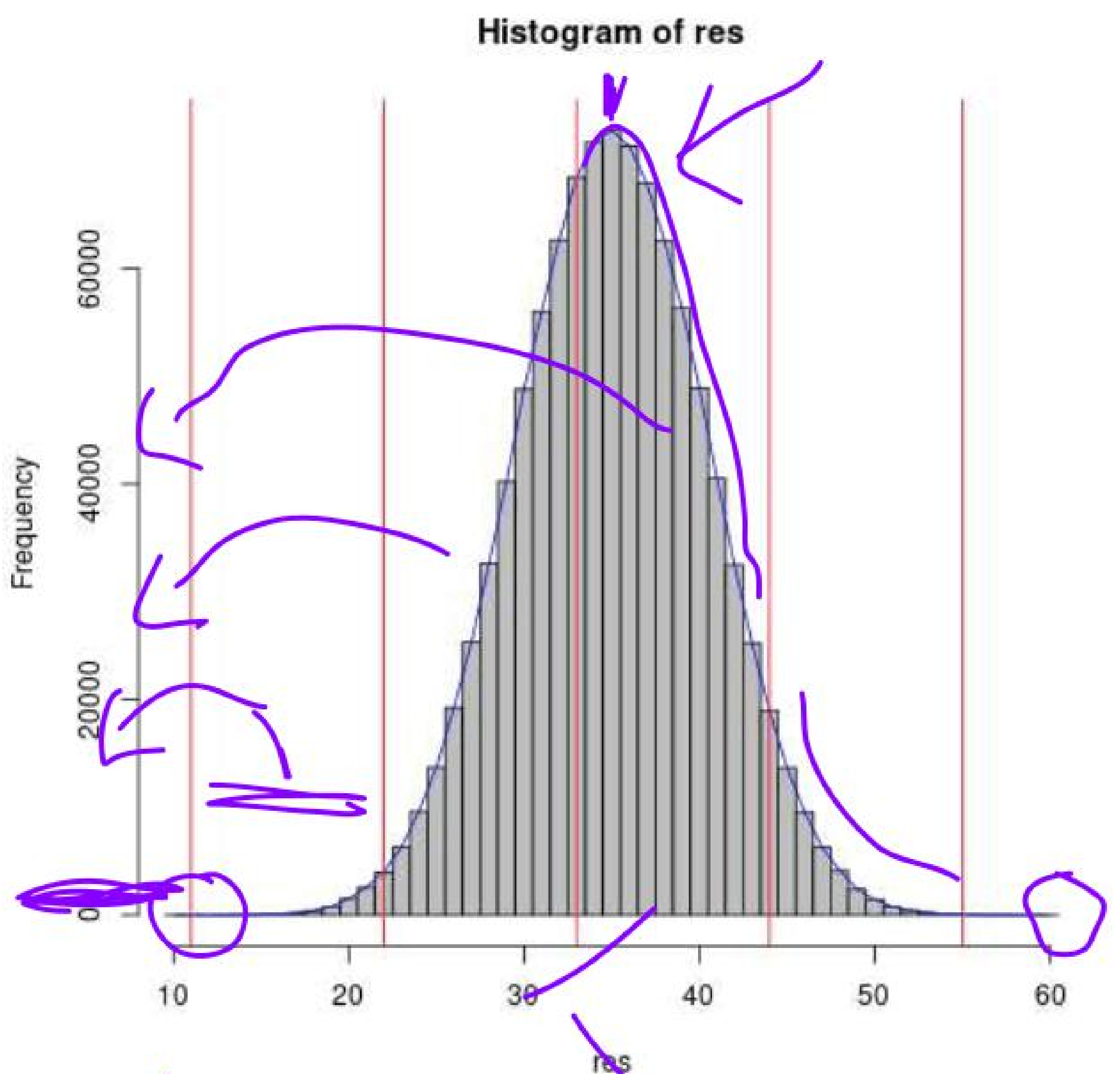
Hodím 10x kostkou, hodnoty sečtu modulo 11.

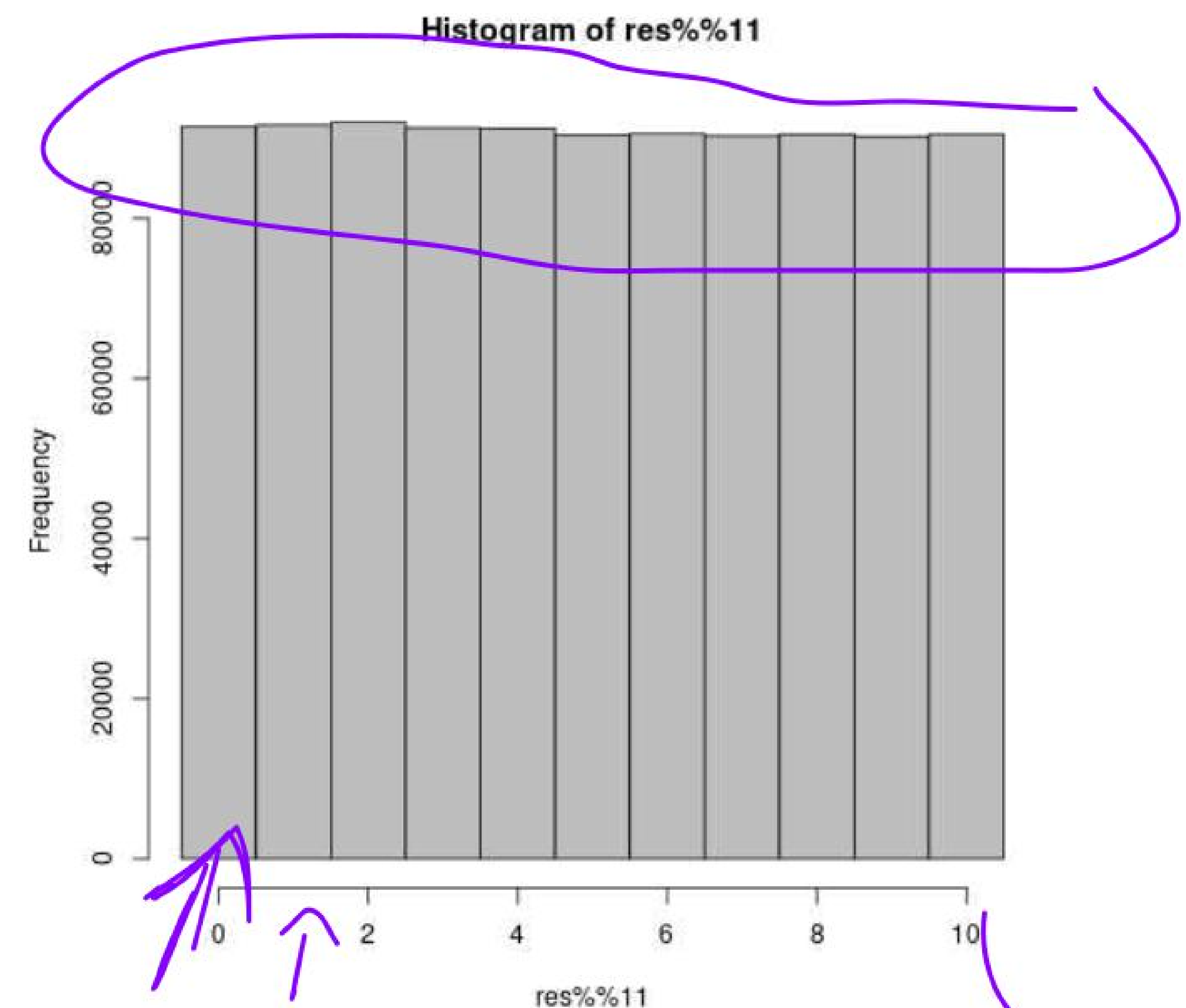






Hodím 10x kostkou, hodnoty sečtu modulo 11.

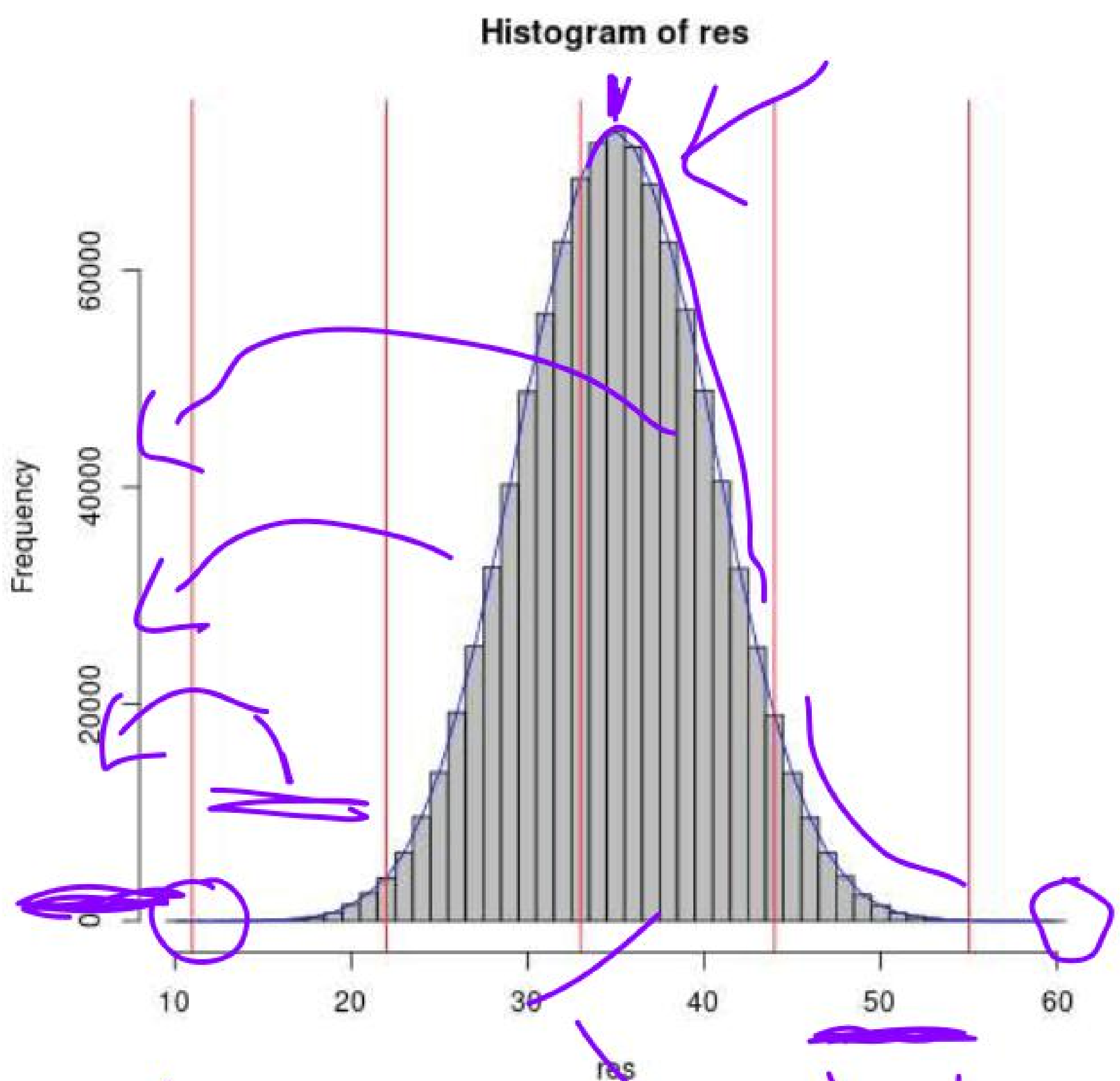


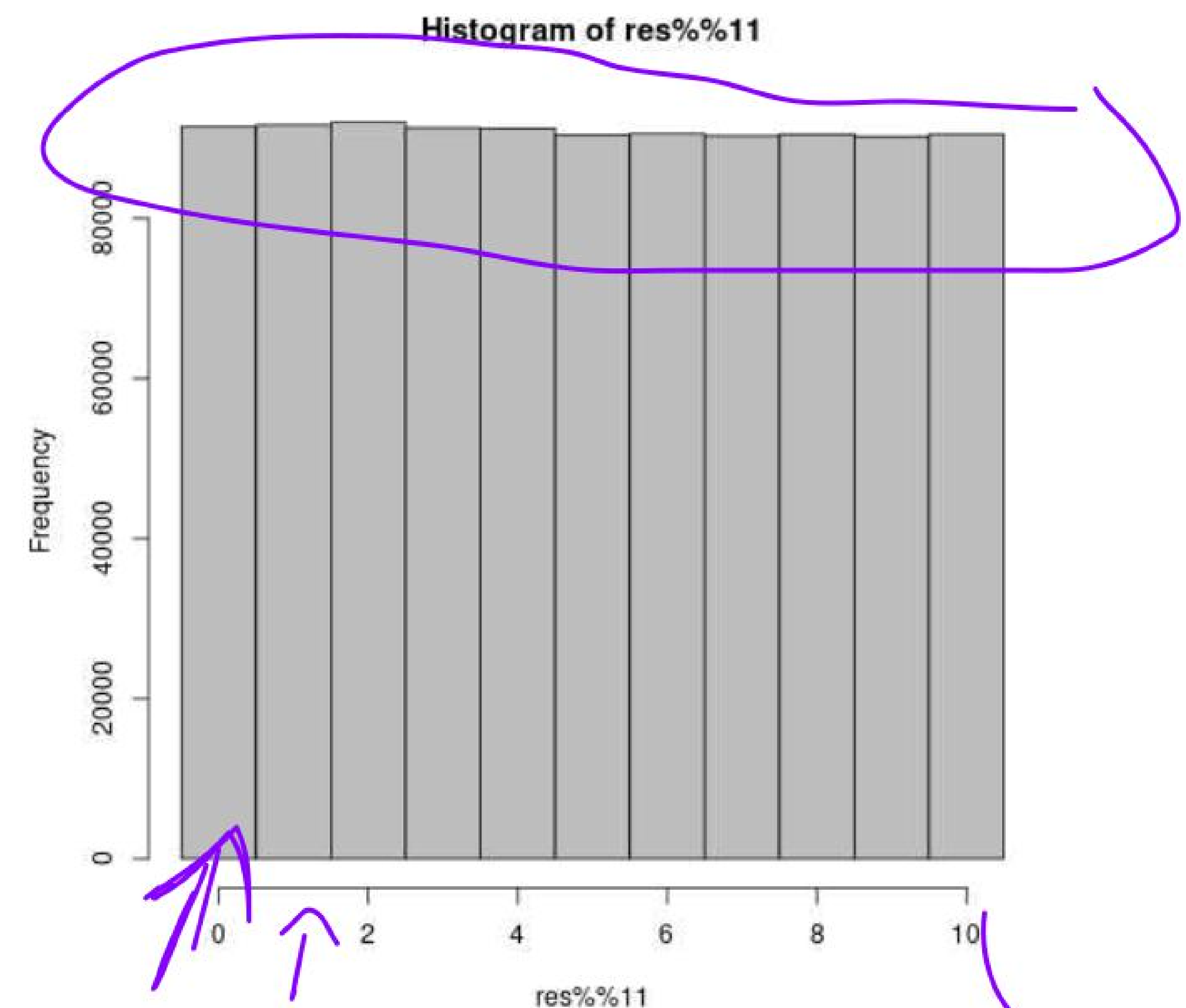


0 1 2 10

11	12	21
22	23	32
33	34	43
44	45	54
55	56	

Hodím 10x kostkou, hodnoty sečtu modulo 11.

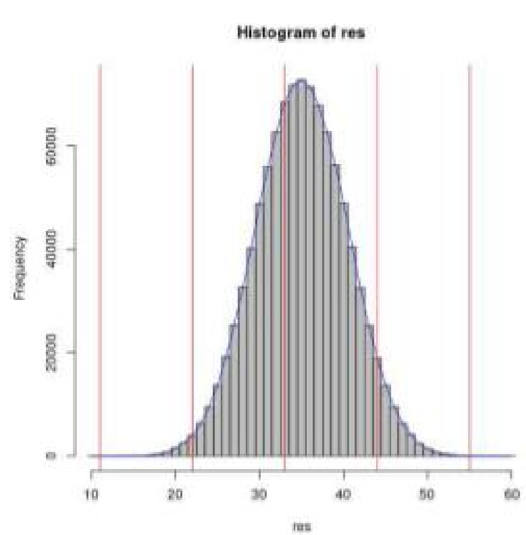


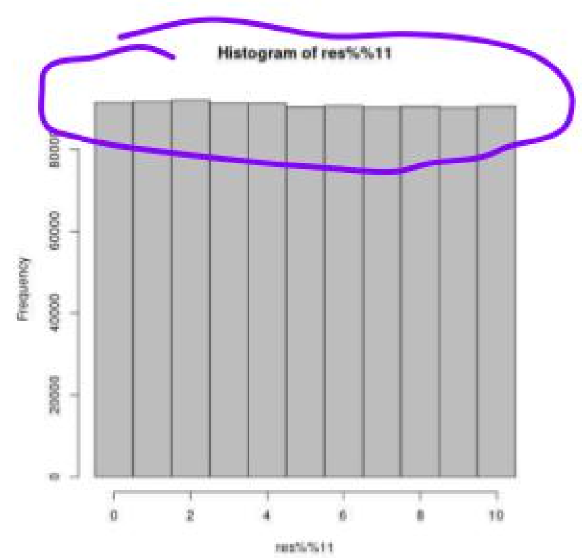


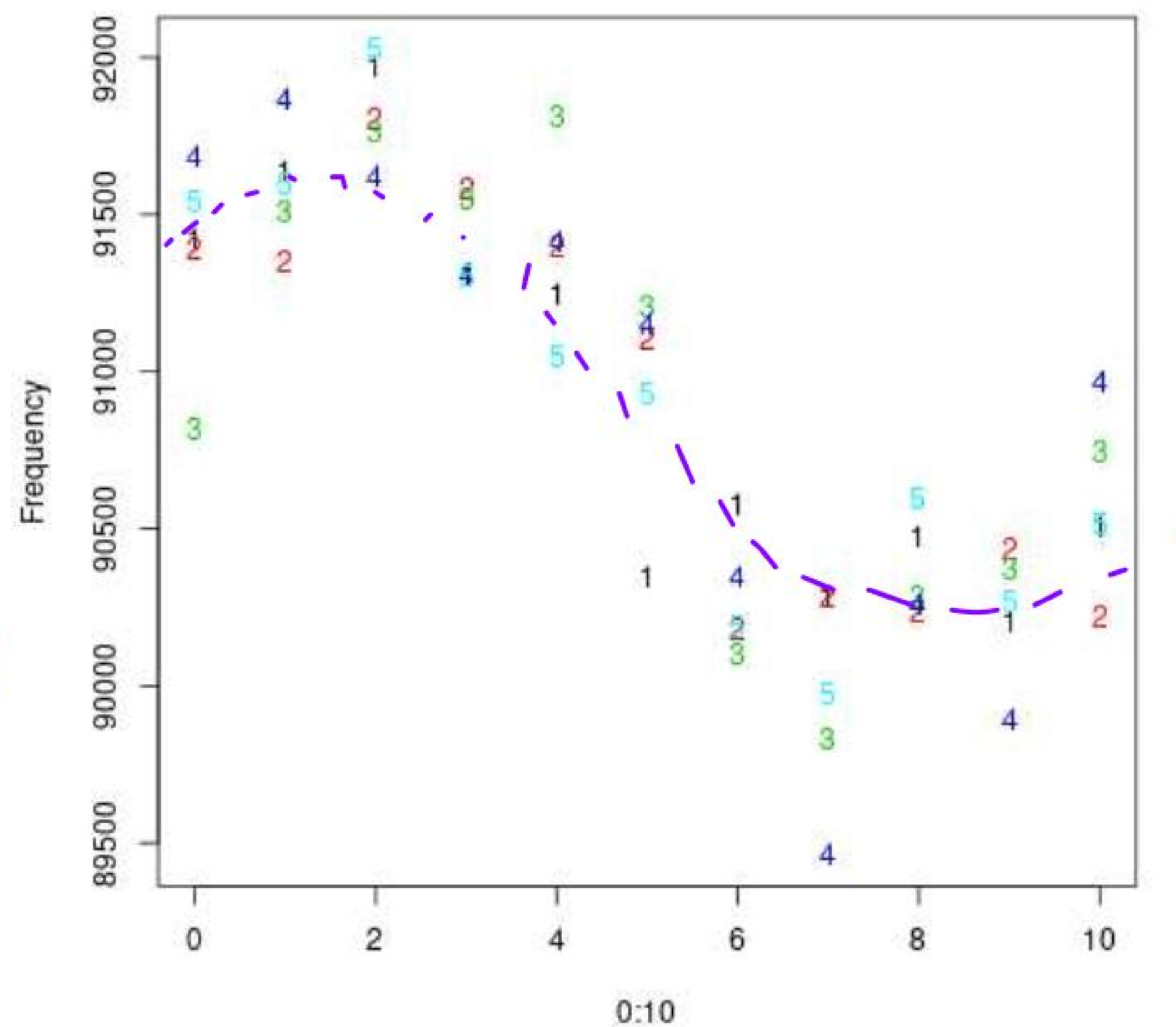
0 1 2 10

11	12	21
22	23	32
33	34	43
44	45	54
55	56	

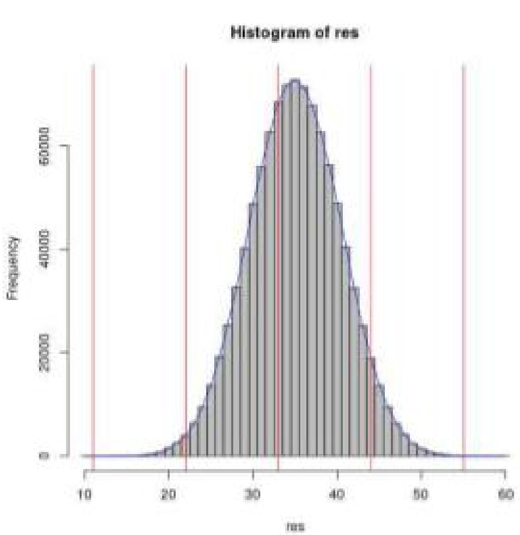
Hodím 10x kostkou, hodnoty sečtu modulo 11.

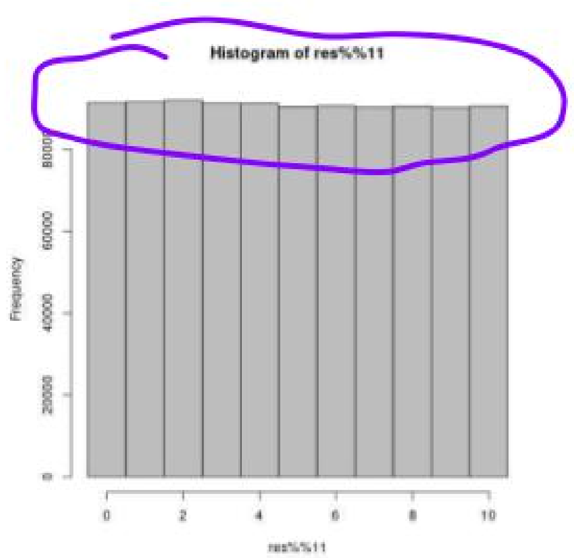


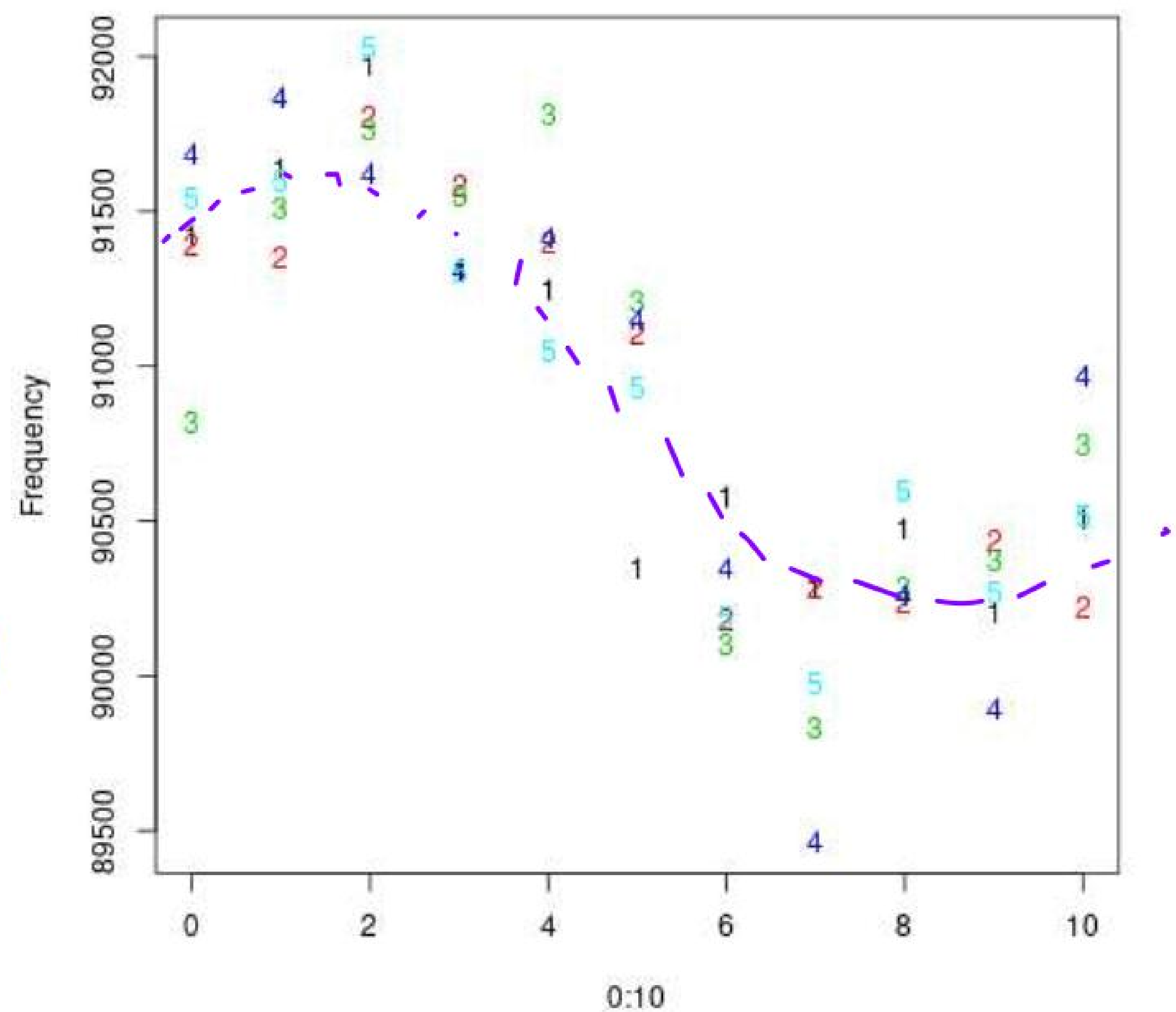




Hodím 10x kostkou, hodnoty sečtu modulo 11.







1. hodím kostkou $1\text{-}3 \rightarrow m = 0$

$4\text{-}6 \rightarrow m = 5$

2. hodím kostkou $c = \text{hod} - 1$, pokud padne 6, házím znovu

celková hodnota: $m + c$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	41	42	43	44	45
21	22	23	24	25	26	51	52	53	54	55
31	32	33	34	35	36	61	62	63	64	65

1. hodím kostkou $1\text{-}3 \rightarrow m = 0$

$4\text{-}6 \rightarrow m = 5$

2. hodím kostkou $c = \text{hod} - 1$, pokud padne 6, házím znovu

<u>celková hodnota: $m + c$</u>

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
11	12	13	14	15	16	41	42	43	44	45	46
21	22	23	24	25	26	51	52	53	54	55	56
31	32	33	34	35	36	61	62	63	64	65	66

1. k.   2. k.

0 1 2 3 4 5

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

$\underbrace{0\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5}_{6.}\ \overbrace{6\ 7\ 8\ 9\ 10}^{5}$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}$ $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{6}$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}$

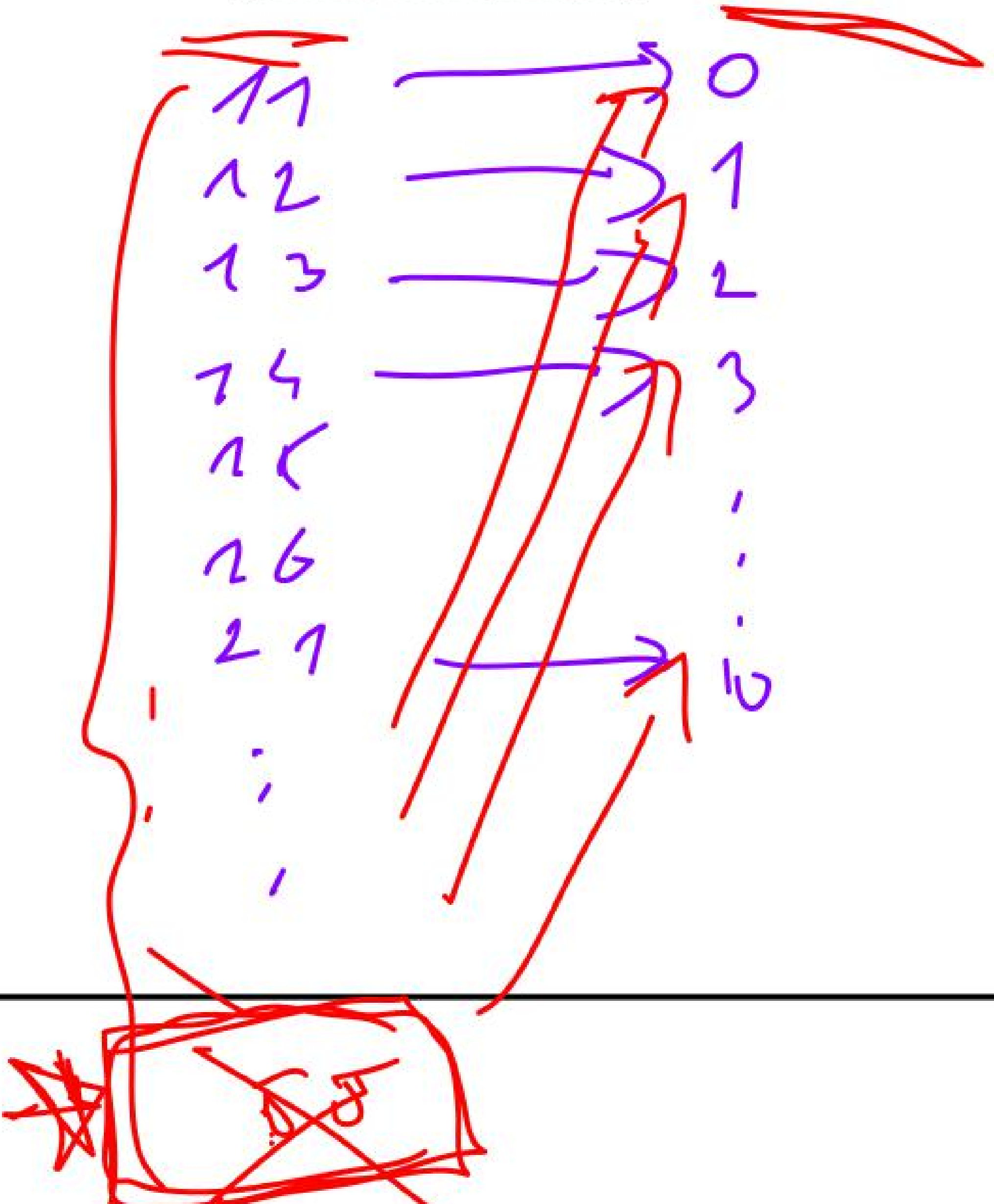
Yes 7

No 4

- Musíme použít minimálně dva hody, neboť hod kostkou má $|S| = 6$, zatímco generátor má $|S| = 11$, pokud použijeme dva hody kostkou a budeme rozlišovat hod první a druhou kostkou, máme počet stavů $|S|^2 = 36$.
- Nyní je potřeba najít dobré zobrazení z jednoho prostoru. Očíslujme si jednotlivé výsledky dvou hodů kostkou ((1,1);(1,2);…;(6,6) → 1;2;…;36), a 33 stavů použijeme pro výsledky generátoru (například přes %11), tři zbývající budou neplatné a v takovém případě znovu dvakrát hodíme kostkou. Tím problém vyřešíme, ovšem s pravděpodobností 1/12 budeme házet znovu a teoreticky se nemusíme zastavit, ovšem v průmerném případě zastavíme ve E(počet dvojhodů) = 1 + 1/12.

- Musíme použít minimálně dva hody, neboť hod kostkou má |S| = 6, zatímco generátor má |S| = 11, pokud použijeme dva hody kostkou a budeme rozlišovat hod první a druhou kostkou, máme počet stavů $|S|^2 = 36$.
- Nyní je potřeba najít dobré zobrazení z jednoho prostoru. Očíslujme si jednotlivé výsledky dvou hodů kostkou ((1,1);(1,2);…;(6,6) → 1;2;…;36), a 33 stavů použijeme pro výsledky generátoru (například přes %11), tři zbývající budou neplatné a v takovém případě znovu dvakrát hodíme kostkou. Tím problém vyřešíme, ovšem s pravděpodobností 1/12 budeme házet znovu a teoreticky se nemusíme zastavit, ovšem v průmerném případě zastavíme ve E(počet dvojhodů) = 1 + 1/12.

$$\boxed{E\,\#\text{dvojhodů} = \frac{36}{33}}$$

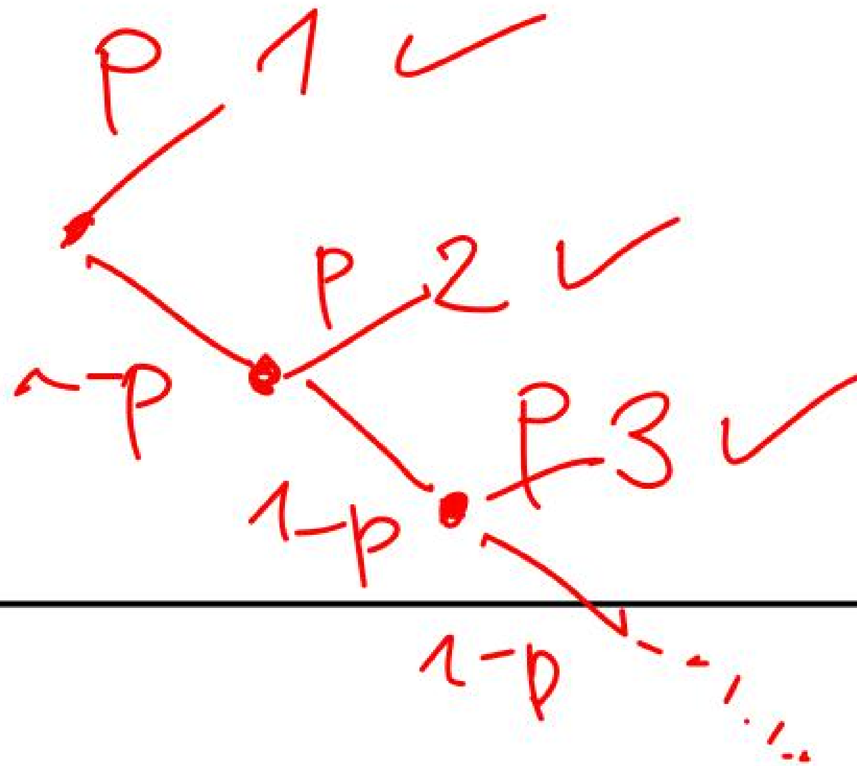


36

33 $\quad p = \frac{33}{36}$

$X \sim Geo(p)$

\# neúspěchů před 1. úsp.



$$EX = \frac{1-p}{p} = \frac{1}{p} - 1$$

$$\frac{36}{33} - 1$$

Př. 10/11b: největší společný dělitel

Vypočtěte největší společný dělitel
a) $GCD(220, 284)$,
b) $GCD(\binom{30}{10}, \binom{31}{9})$,
c) $GCD(2^{100}, 100!)$.

- Musíme použít minimálně dva hody, neboť hod kostkou má |S| = 6, zatímco generátor má |S| = 11, pokud použijeme dva hody kostkou a budeme rozlišovat hod první a druhou kostkou, máme počet stavů $|S|^2 = 36$.
- Nyní je potřeba najít dobré zobrazení z jednoho prostoru. Očíslujme si jednotlivé výsledky dvou hodů kostkou ((1,1);(1,2);…;(6,6) → 1;2;…;36), a 33 stavů použijeme pro výsledky generátoru (například přes %11), tři zbývající budou neplatné a v takovém případě znovu dvakrát hodíme kostkou. Tím problém vyřešíme, ovšem s pravděpodobností 1/12 budeme házet znovu a teoreticky se nemusíme zastavit, ovšem v průmerném případě zastavíme ve E(počet dvojhodů) = 1 + 1/12.

$$\boxed{E\,\#\text{dvojhodů} = \frac{36}{33}}$$

36

33 $\quad p = \frac{33}{36}$

$X \sim \mathrm{Geo}(p)$

\# neúspěchů před 1. úsp.

$EX = \frac{1-p}{p} = \frac{1}{p} - 1$

$\frac{36}{33} - 1$

0 – 15 0 – 10

$p = \frac{11}{16}$ $\frac{16}{11}$

- Musíme použít minimálně dva hody, neboť hod kostkou má |S| = 6, zatímco generátor má |S| = 11, pokud použijeme dva hody kostkou a budeme rozlišovat hod první a druhou kostkou, máme počet stavů $|S|^2 = 36$.
- Nyní je potřeba najít dobré zobrazení z jednoho prostoru. Očíslujme si jednotlivé výsledky dvou hodů kostkou ((1,1);(1,2);…;(6,6) → 1;2;…;36), a 33 stavů použijeme pro výsledky generátoru (například přes %11), tři zbývající budou neplatné a v takovém případě znovu dvakrát hodíme kostkou. Tím problém vyřešíme, ovšem s pravděpodobností 1/12 budeme házet znovu a teoreticky se nemusíme zastavit, ovšem v průmerném případě zastavíme ve E(počet dvojhodů) = 1 + 1/12.

$\boxed{E\ \#\text{dvojhodů} = \frac{36}{33}}$

11 → 0
12 → 1
13 → 2
14 → 3
15
16
21 → 10

36

33 $p = \frac{33}{36}$

$X \sim Geo(p)$

\# neúspěchů před 1. úsp.

p 1 ✓

1−p p 2 ✓

1−p p 3 ✓

1−p

$EX = \frac{1-p}{p} = \frac{1}{p} - 1$

$\frac{36}{33} - 1$

Př. 10/11b: největší společný dělitel

Vypočtěte největší společný dělitel
a) $GCD(220, 284)$,
b) $GCD(\binom{30}{10}, \binom{31}{9})$,
c) $GCD(2^{100}, 100!)$.

b) $30045015 = 1 \cdot 20160075 + 9884940$

$20\,160\,075 = 2 \cdot 9\,884\,940 + 390\,195$

$9\,884\,940 = 25 \cdot 390\,195 + 130\,065$

$390\,195 = 3 \cdot \underline{130\,065} + 0$

Př. 10/11b: největší společný dělitel

Vypočtěte největší společný dělitel
a) $GCD(220, 284)$,
b) $GCD(\binom{30}{10}, \binom{31}{9})$,
c) $GCD(2^{100}, 100!)$.

b) $30045015 = 1 \cdot 20160075 + 9\,884\,940$

$$20\,160\,075 = 2 \cdot 9\,884\,940 + 390\,195$$

$$9\,884\,940 = 25 \cdot 390\,195 + 130\,065$$

$$390\,195 = 3 \cdot \underline{130\,065} + 0$$

$\binom{30}{10}$ $\binom{31}{9}$

a b c

b) $30045015 = 1 \cdot 20160075 + 9884940$

$20160075 = 2 \cdot 9884940 + 390195$

$9884940 = 25 \cdot 390195 + 130065$

$390195 = 3 \cdot 130065 + 0$

x, y

$x = p \cdot d$

$y = q \cdot d$

$x - y = (p - q)d$

$$\binom{30}{10} = \frac{30!}{10!\cdot 20!}$$

$$\binom{31}{9} = \frac{31!}{9!\cdot 22!} \overset{\cdot\frac{10}{10}}{=\!=} \frac{10\cdot 31!}{10\cdot 9!\cdot 22!} = \frac{31\cdot 10\cdot 30!}{10!\cdot 22\cdot 21\cdot 20!} = \frac{31\cdot 10}{22\cdot 21}\cdot \overset{\overset{\binom{30}{10}}{\|}}{\frac{30!}{10!\cdot 20!}}$$

Největším společným dělitelem je komb. číslo $\binom{30}{10}$.

$$\binom{30}{10} = \frac{30!}{10!\cdot 20!}$$

$$\binom{31}{9} = \frac{31!}{9!\cdot 22!} \overset{\cdot\frac{10}{10}}{=} \frac{10\cdot 31!}{10\cdot 9!\cdot 22!} = \frac{31\cdot 10\cdot 30!}{10!\cdot 22\cdot 21\cdot 20!} = \underbrace{\frac{31\cdot 10}{22\cdot 21}}_{<1}\cdot \underbrace{\frac{30!}{10!\cdot 20!}}_{=\boxed{\binom{30}{10}}}$$

Největším společným dělitelem je komb. číslo $\binom{30}{10}$.

Př. 10/11c: největší společný dělitel

Vypočtěte největší společný dělitel
a) $GCD(220, 284)$,
b) $GCD(\binom{30}{10}, \binom{31}{9})$,
c) $GCD(2^{100}, 100!)$.

c) $2^{100} = 2^{100}$

Legendre's formula: $v_2(100!) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{100}{2^i} \right\rfloor =$

$$= \left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{8} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{16} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{32} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{64} \right\rfloor = 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97$$

Př. 10/11c: největší společný dělitel

Vypočtěte největší společný dělitel

a) $GCD(220, 284)$,

b) $GCD(\binom{30}{10}, \binom{31}{9})$,

c) $GCD(2^{100}, 100!)$.

Př. 10/11c: největší společný dělitel

Vypočtěte největší společný dělitel
a) $GCD(220, 284)$,
b) $GCD(\binom{30}{10}, \binom{31}{9})$,
c) $GCD(2^{100}, 100!)$. $= 2^{97}$

2 |
4 | |
6 |
8 | | |
10 |
12 | |
14 |
16 | | |
18 |
⋮
100 | | |

Σ 50 25 12 6 3 1 $= 97$

c) $2^{100} = 2^{100}$

Legendre's formula: $v_2(100!) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{100}{2^i} \right\rfloor =$

$= \left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{8} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{16} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{32} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{64} \right\rfloor = 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97$

c) $2^{100} = 2^{100}$

Legendre's formula: $v_2(100!) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{100}{2^i} \right\rfloor =$

$$= \left\lfloor \frac{100}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{8} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{16} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{32} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{64} \right\rfloor = 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 97$$

Př. 10/14: modulární umocňování - kód

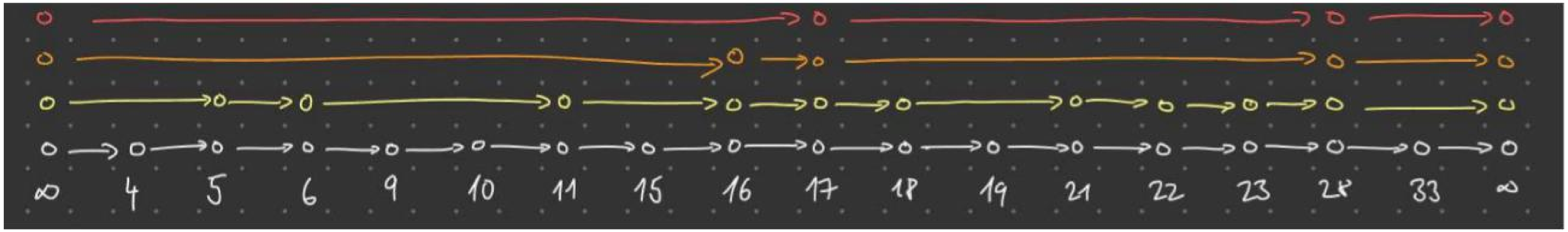
Uvedený kód počítá celočíselnou mocninu x^n. Popište, jak jej upravíte, aby počítal $x^n \; mod \; m$, pro kladné celé m. Minimalizujte riziko přetečení.

```
BinPower(int x, int n) {
  int r = 1, y = x;
  while (n > 1) {
    if (n % 2 == 1) r *= y;
    y *= y;
    n /= 2;
  }
 return r*y;
}
```

Skip list. B-stromy.

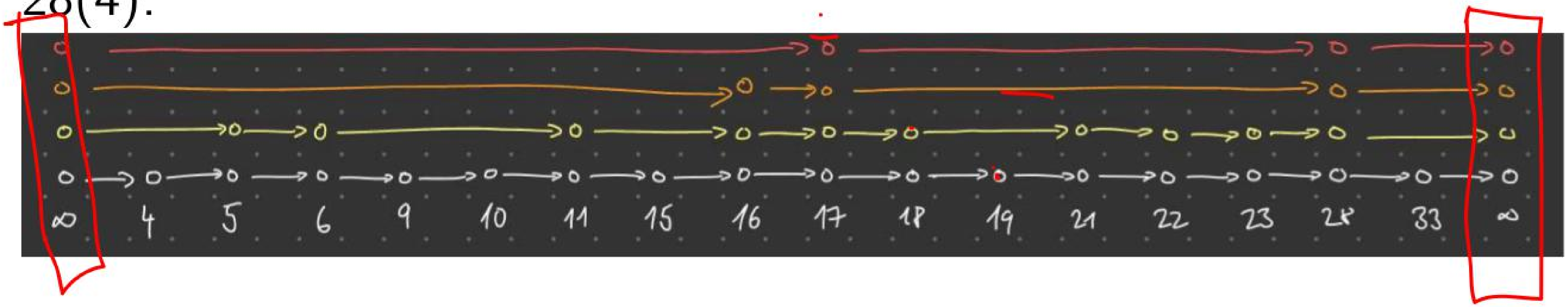
Př. 11/1: skip list - konstrukce

Sestavte skip list, který je nejprve prázdný a dále do něj vkládáte dané klíče v uvedeném pořadí. Číslo za klíčem v závorce uvádí úroveň (level) klíče, tj. kolikrát byla hozena mince, než padl rub (včetně rubu): 16(3), 23(2), 18(2), 5(2), 15(1), 19(1), 33(1), 11(2), 21(2), 4(1), 22(2), 6(2), 17(4), 10(1), 9(1), 28(4).



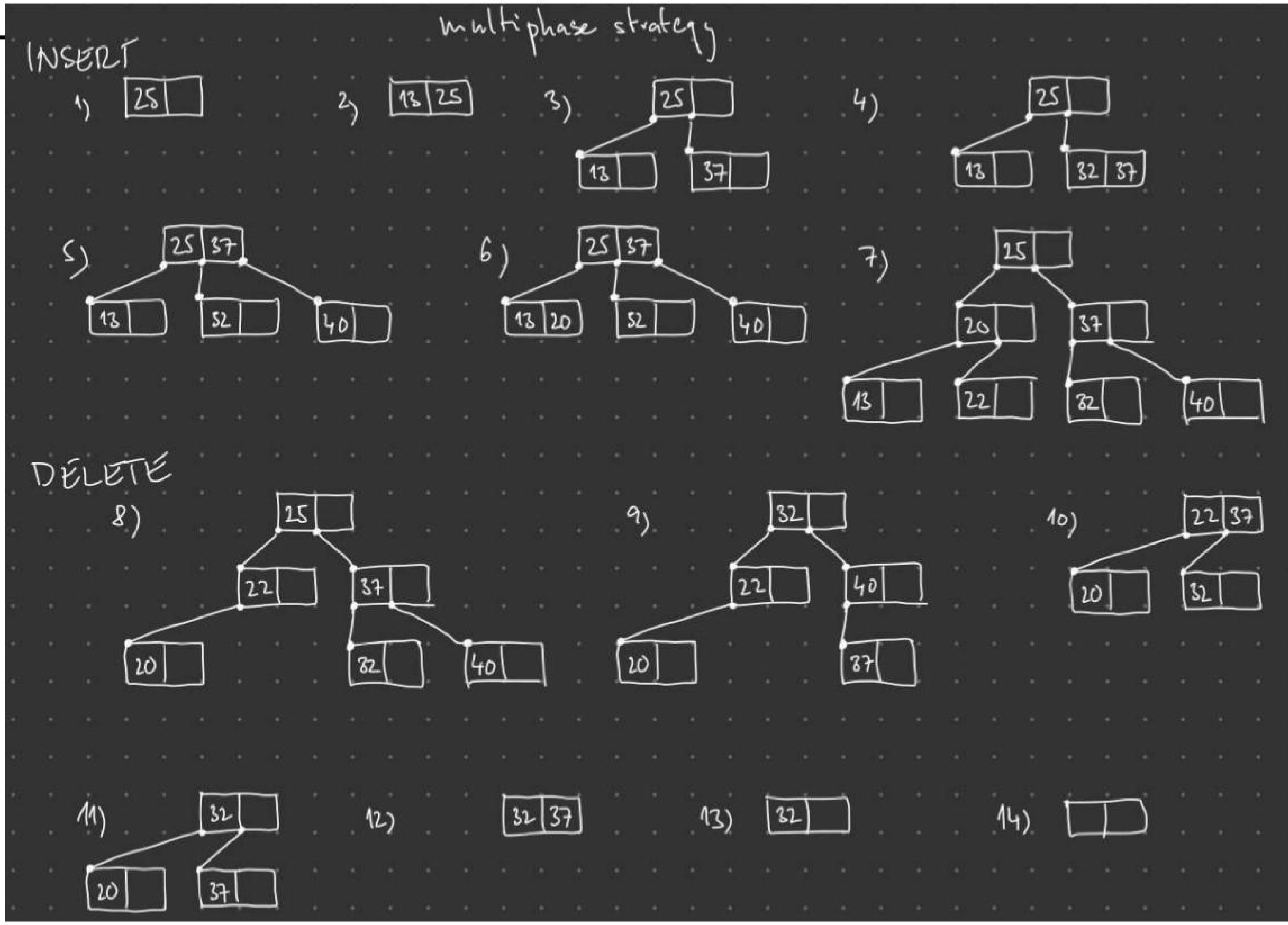
Př. 11/1: skip list - konstrukce

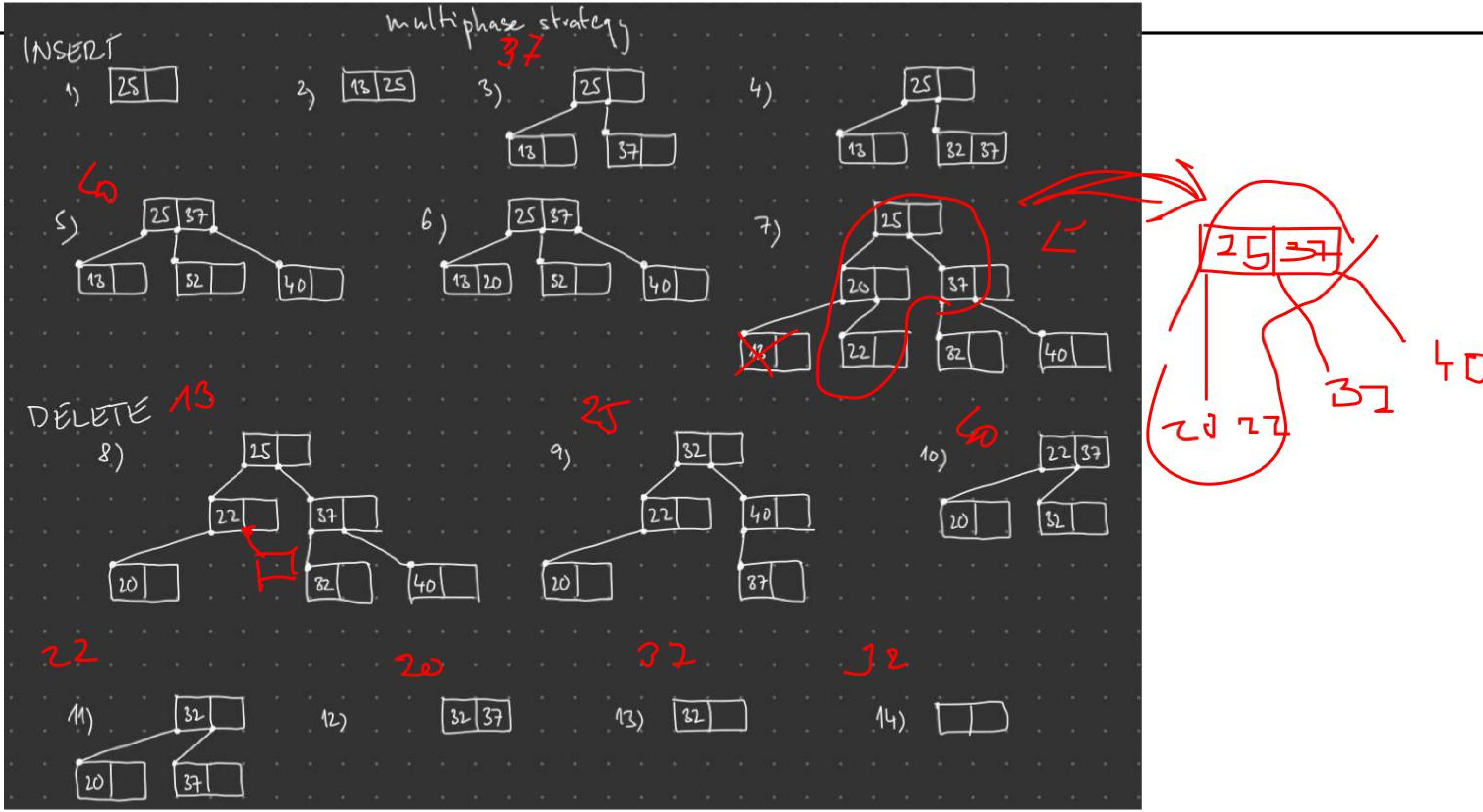
Sestavte skip list, který je nejprve prázdný a dále do něj vkládáte dané klíče v uvedeném pořadí. Číslo za klíčem v závorce uvádí úroveň (level) klíče, tj. kolikrát byla hozena mince, než padl rub (včetně rubu): 16(3), 23(2), 18(2), 5(2), 15(1), 19(1), 33(1), 11(2), 21(2), 4(1), 22(2), 6(2), 17(4), 10(1), 9(1), 28(4).



Př. 11/14: konstrukce a destrukce B stromu

B-strom je řádu k, pokud každý jeho uzel, kromě kořene, musí obsahovat alespoň k klíčů a zároveň může obsahovat nejvýše $2k$ klíčů. Vybudujte B-strom řádu 1 tak, že do prázdného stromu vložíte v uvedeném pořadí klíče $25, 13, 37, 32, 40, 20, 22$. Dále tento strom zrušte, a to tak, že jednotlivé klíče klíče odstraníte v pořadí $13, 25, 40, 22, 20, 37, 32$. Nakreslete strom po každé operaci Insert a Delete.


multiphase strategy
INSERT
1)
2)
3)
4)
5)
6)
7)
DELETE
8)
9)
10)
11)
12)
13)
14)

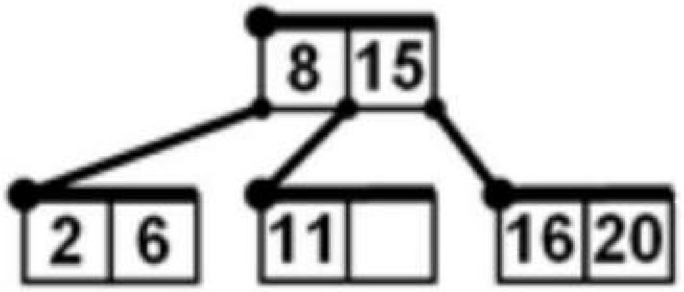


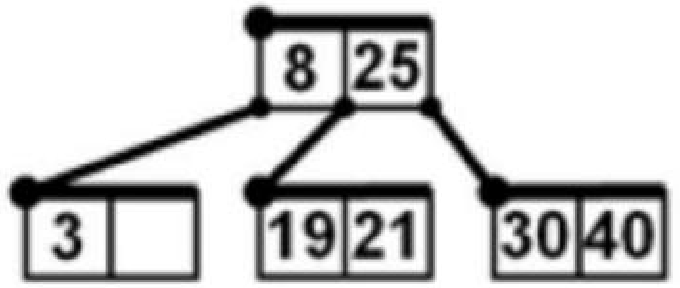
Yes	6	75%
No	2	25%

19 / 28

Př. 11/11: B stromy

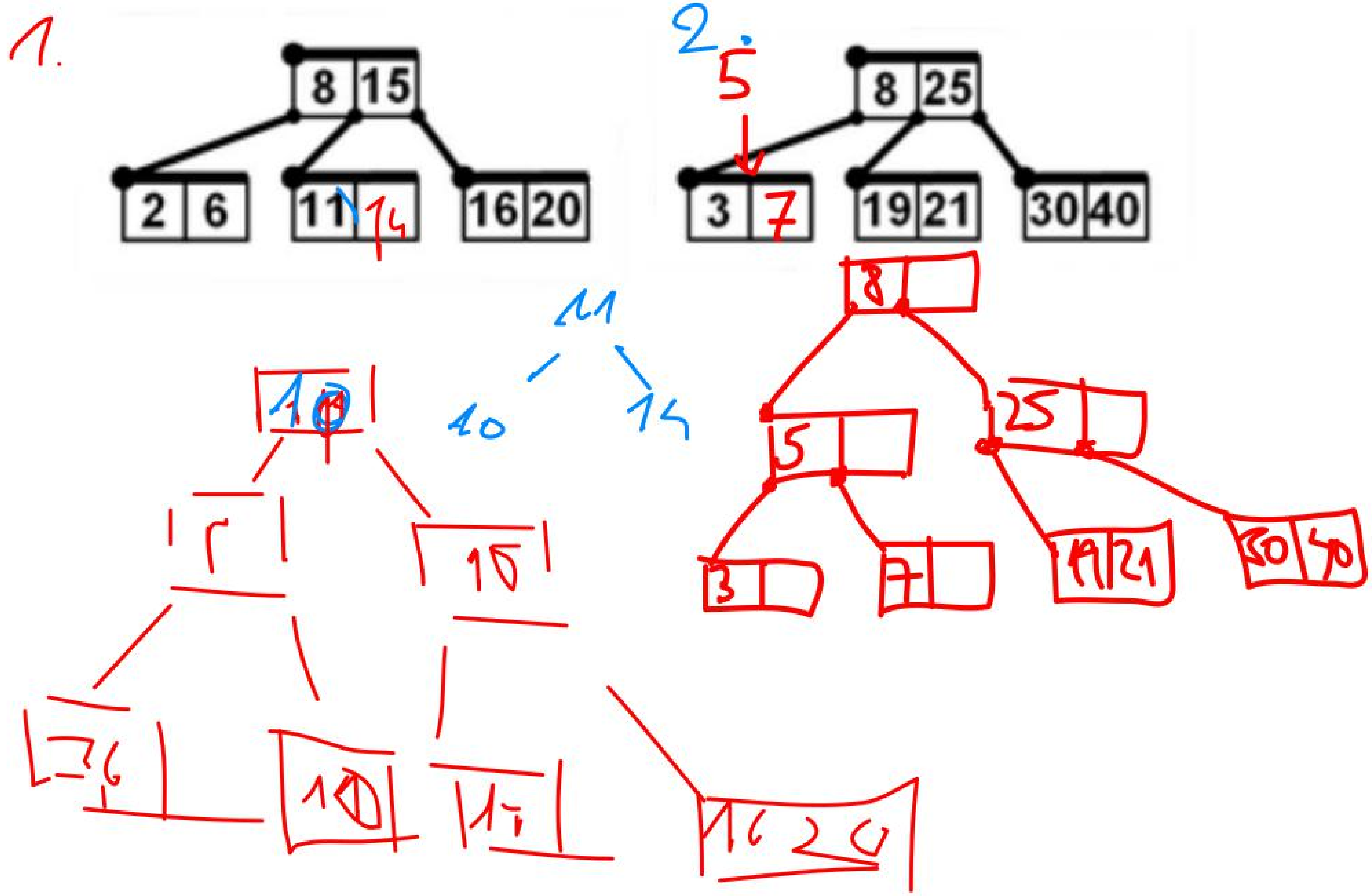
Do B-stromu znázorněného na levém resp. pravém obrázku vložíme postupně klíče 14, 10, resp. 7, 5. Jaké klíče pak bude obsahovat kořen stromu?





Př. 11/11: B stromy

Do B-stromu znázorněného na levém resp. pravém obrázku vložíme postupně klíče 14, 10, resp. 7, 5. Jaké klíče pak bude obsahovat kořen stromu?



Př. 11/12: izomorfní B stromy

Dva prázdné B-stromy řádu 1 (max. 2 klíče v uzlu) jsou izomorfní. Neprázdný B-strom B1 řádu 1 s kořenem K1 je izomorfní s neprázdným B-stromem B2 řádu 1 s kořenem K2 právě tehdy, když zároveň platí 1. a 2.:

1. K1 obsahuje stejný počet klíčů jako K2
2. Levý podstrom K1 je izomorfní s levým podstromem K2, pravý podstrom K1 je izomorfní s pravým podstromem K2 a prostřední podstrom K1, pokud existuje, je izomorfní s prostředním podstromem K2.

Určete počet navzájem neizomorfních B-stromů řádu 1 s A) 0, B) 1, C) 3, D) 4, E) 7 uzly.

Př. 11/12: izomorfní B stromy

Dva prázdné B-stromy řádu 1 (max. 2 klíče v uzlu) jsou izomorfní. Neprázdný B-strom B1 řádu 1 s kořenem K1 je izomorfní s neprázdným B-stromem B2 řádu 1 s kořenem K2 právě tehdy, když zároveň platí 1. a 2.:

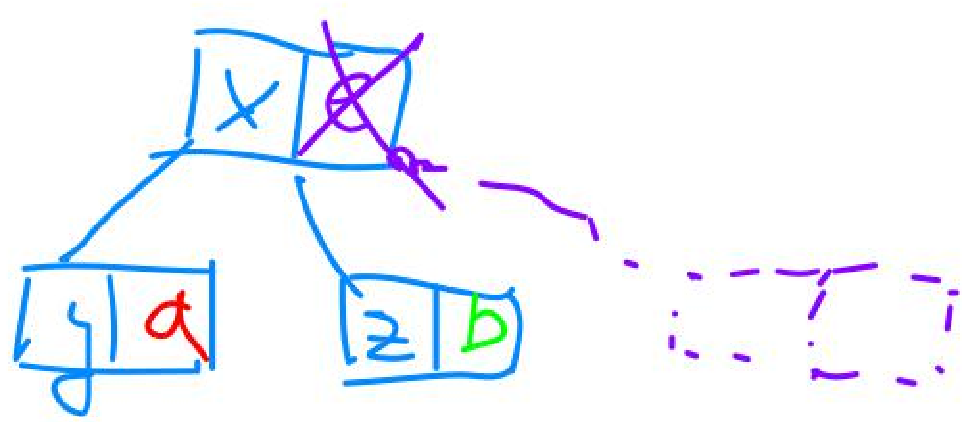
1. K1 obsahuje stejný počet klíčů jako K2
2. Levý podstrom K1 je izomorfní s levým podstromem K2, pravý podstrom K1 je izomorfní s pravým podstromem K2 a prostřední podstrom K1, pokud existuje, je izomorfní s prostředním podstromem K2.

Určete počet navzájem neizomorfních B-stromů řádu 1 s A) 0, B) 1, C) 3, D) 4, E) 7 uzly.

A) {} 1

B) $\boxed{x \,|\, \;}$ $\boxed{x \,|\, y}$ 2

C)



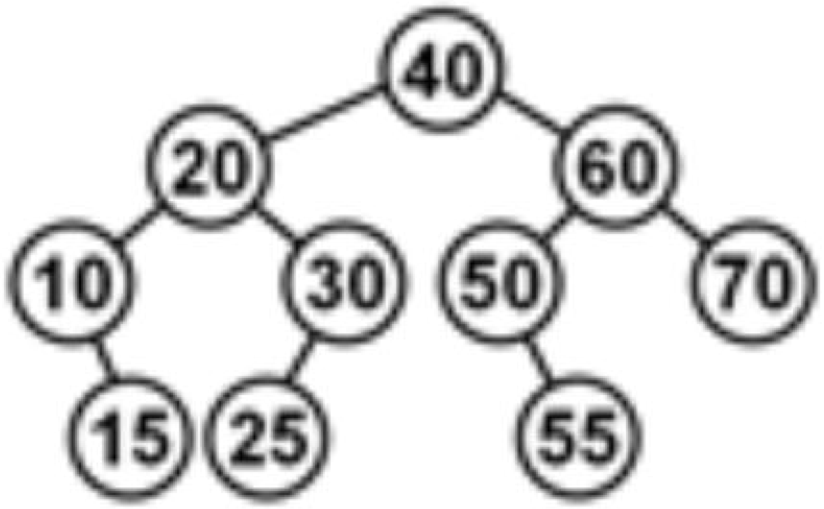
4

Př. 11/16: plněné B stromy

Je dán a) B-strom, b) B+ strom. Strom je řádu 10 a máme do něj umístit 100 000 klíčů. Jaký je maximální a minimální možný počet uzlů tohoto stromu? Jaká je maximální a minimální možná hloubka tohoto stromu?

Př. 12/1: AVL stromy

Rozhodněte, zda a jaká rotace bude použita během operací DELETE klíčů 5, 25, 35 (v tomto pořadí) nad AVL stromem:



Př. 12/2: Splay stromy

Do nejprve prázdného stromu splay tree vkládejte postupně klíče 2, 7, 1, 4, 3, 9, 5, 6. Nakreslete strom po každém vložení.

Př. 12/3: Splay stromy

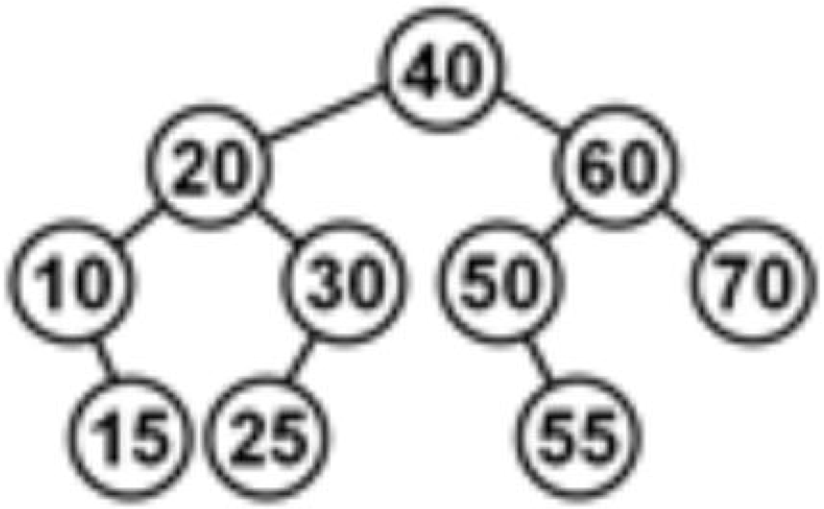
Splay tree obsahuje $2^n - 1$ klíčů s hodnotou $1, 2, 3, \ldots 2^n - 1$ a je ideálně vyvážený, to jest má hloubku $n - 1$. Po vyhledání prvku s klíčem 1 se tento prvek přesune do kořene stromu. Jakou hloubku bude mít výsledný strom? Řešte zvlášť pro sudé a liché n.

Př. 12/2: Splay stromy

Do nejprve prázdného stromu splay tree vkládejte postupně klíče 2, 7, 1, 4, 3, 9, 5, 6. Nakreslete strom po každém vložení.

Př. 12/1: AVL stromy

Rozhodněte, zda a jaká rotace bude použita během operací DELETE klíčů 5, 25, 35 (v tomto pořadí) nad AVL stromem:



Př. 11/16: plněné B stromy

Je dán a) B-strom, b) B+ strom. Strom je řádu 10 a máme do něj umístit 100 000 klíčů. Jaký je maximální a minimální možný počet uzlů tohoto stromu? Jaká je maximální a minimální možná hloubka tohoto stromu?

Př. 11/12: izomorfní B stromy

Dva prázdné B-stromy řádu 1 (max. 2 klíče v uzlu) jsou izomorfní. Neprázdný B-strom B1 řádu 1 s kořenem K1 je izomorfní s neprázdným B-stromem B2 řádu 1 s kořenem K2 právě tehdy, když zároveň platí 1. a 2.:

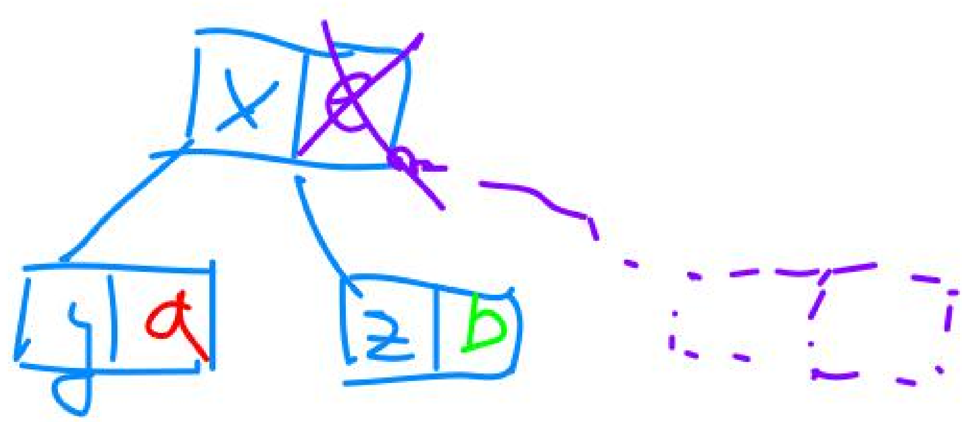
1. K1 obsahuje stejný počet klíčů jako K2
2. Levý podstrom K1 je izomorfní s levým podstromem K2, pravý podstrom K1 je izomorfní s pravým podstromem K2 a prostřední podstrom K1, pokud existuje, je izomorfní s prostředním podstromem K2.

Určete počet navzájem neizomorfních B-stromů řádu 1 s A) 0, B) 1, C) 3, D) 4, E) 7 uzly.

A) {} 1

B) $\boxed{x|\ }$ $\boxed{x|y}$ 2

C)



4

Př. 11/12: izomorfní B stromy

Dva prázdné B-stromy řádu 1 (max. 2 klíče v uzlu) jsou izomorfní. Neprázdný B-strom B1 řádu 1 s kořenem K1 je izomorfní s neprázdným B-stromem B2 řádu 1 s kořenem K2 právě tehdy, když zároveň platí 1. a 2.:

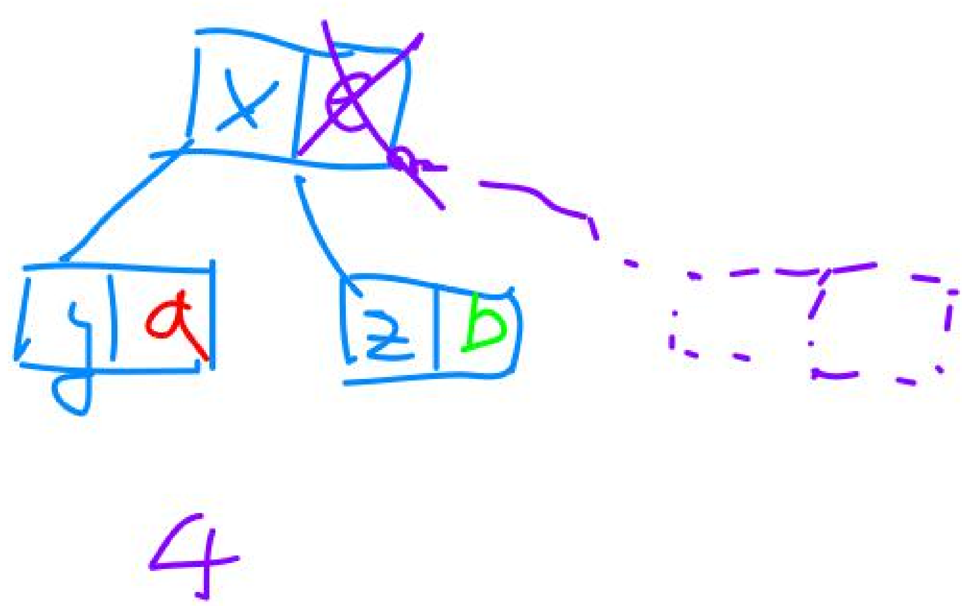
1. K1 obsahuje stejný počet klíčů jako K2
2. Levý podstrom K1 je izomorfní s levým podstromem K2, pravý podstrom K1 je izomorfní s pravým podstromem K2 a prostřední podstrom K1, pokud existuje, je izomorfní s prostředním podstromem K2.

Určete počet navzájem neizomorfních B-stromů řádu 1 s A) 0, B) 1, C) 3, D) 4, E) 7 uzly.

A) { } 1

B) $\boxed{x|\ }$ $\boxed{x|y}$ 2

C)



Př. 11/16: plněné B stromy

Je dán a) B-strom, b) B+ strom. Strom je řádu 10 a máme do něj umístit 100 000 klíčů. Jaký je maximální a minimální možný počet uzlů tohoto stromu? Jaká je maximální a minimální možná hloubka tohoto stromu?

Př. 12/1: AVL stromy

Rozhodněte, zda a jaká rotace bude použita během operací DELETE klíčů 5, 25, 35 (v tomto pořadí) nad AVL stromem: