$$|E| = 4|V|$$
$$\| \qquad \|$$
$$m = 4n$$

$$O(m \log n) \Rightarrow$$
$$O(m \log m) = O(2 m \log n)$$
$$O(m \log n)$$

$$m = 2$$
$$n = 10^6$$

Yes	1		11%
No	8	/ 44	88%

$$|E| = 4|V|$$

$$m = 4n$$

$$O(m \log n) \Rightarrow$$

$$O(m \log m) = O(2 m \log n)$$

$$\Omega(n \log n)$$

$m = 2$

$n = 10^6$

$$\Rightarrow 4 n \log n$$

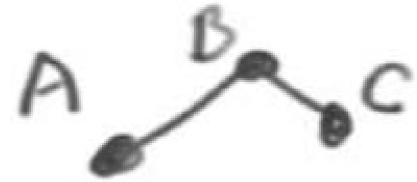
$$2 n \log n + n$$

$$\Leftarrow \boxed{\begin{array}{c} O(n \log n) \\ O(n \log n) \end{array}}$$

Yes		1	11%
No		8	88%

/ 44

Př. 5. Převody grafových reprezentací



$G = (V, E)$, $n = |V|$, $m = |E|$

$$\begin{array}{c|ccc} & A & B & C \\ \hline A & 0 & 1 & 0 \\ B & & 0 & 1 \\ C & & & 0 \end{array}$$

I

$$\begin{array}{c|ccc} & A & B & C \\ \hline e_1 & 1 & 1 & 0 \\ e_2 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

II

$A \to B$
$B \to A, C$
$C \to B$

III

	I → II	II → I	I → III	III → I	II → III	III → II
$O(n)$						
$O(m)$						
$O(n^2)$						
$O(nm)$						
$O(n^2 m)$						
$O(n^2 + m)$						
$O(n^2 + nm)$						
$O(n^3)$						
$O(n^4)$						

Př. 3: zápas Prim vs. Kruskal

Uveďte asymptotickou složitost algoritmu hledání minimální kostry jednak Primova a jednak Kruskalova. Který z těchto algoritmů je asymptoticky rychlejší, za předpokladu, že počet hran grafu je čtyřnásobkem počtu uzlů?

Př. 4: hendikepovaný Kruskal

Předpokládejme, že vážený neorientovaný graf G je reprezentován svou váhovou maticí C. Určete, jaká bude asymptotická složitost Kruskalova algoritmu hledání minimální kostry za předpokladu, že doba přístupu ke každému prvku matice C je konstantní, ale zato doba každé jednotlivé operace Union i Find je vždy úměrná počtu uzlů v grafu G.

Př. 4: hendikepovaný Kruskal

Předpokládejme, že vážený neorientovaný graf G je reprezentován svou váhovou maticí C. Určete, jaká bude asymptotická složitost Kruskalova algoritmu hledání minimální kostry za předpokladu, že doba přístupu ke každému prvku matice C je konstantní, ale zato doba každé jednotlivé operace Union i Find je vždy úměrná počtu uzlů v grafu G. $= n$

$$O(m \log m + m\, t_{FIND} + n\, t_{UNION})$$

třídění $\qquad O(n) \qquad O(n)$

$E \subseteq \binom{V}{2}$

$$O(m \log m + \underline{m\, n} + n\, n)$$

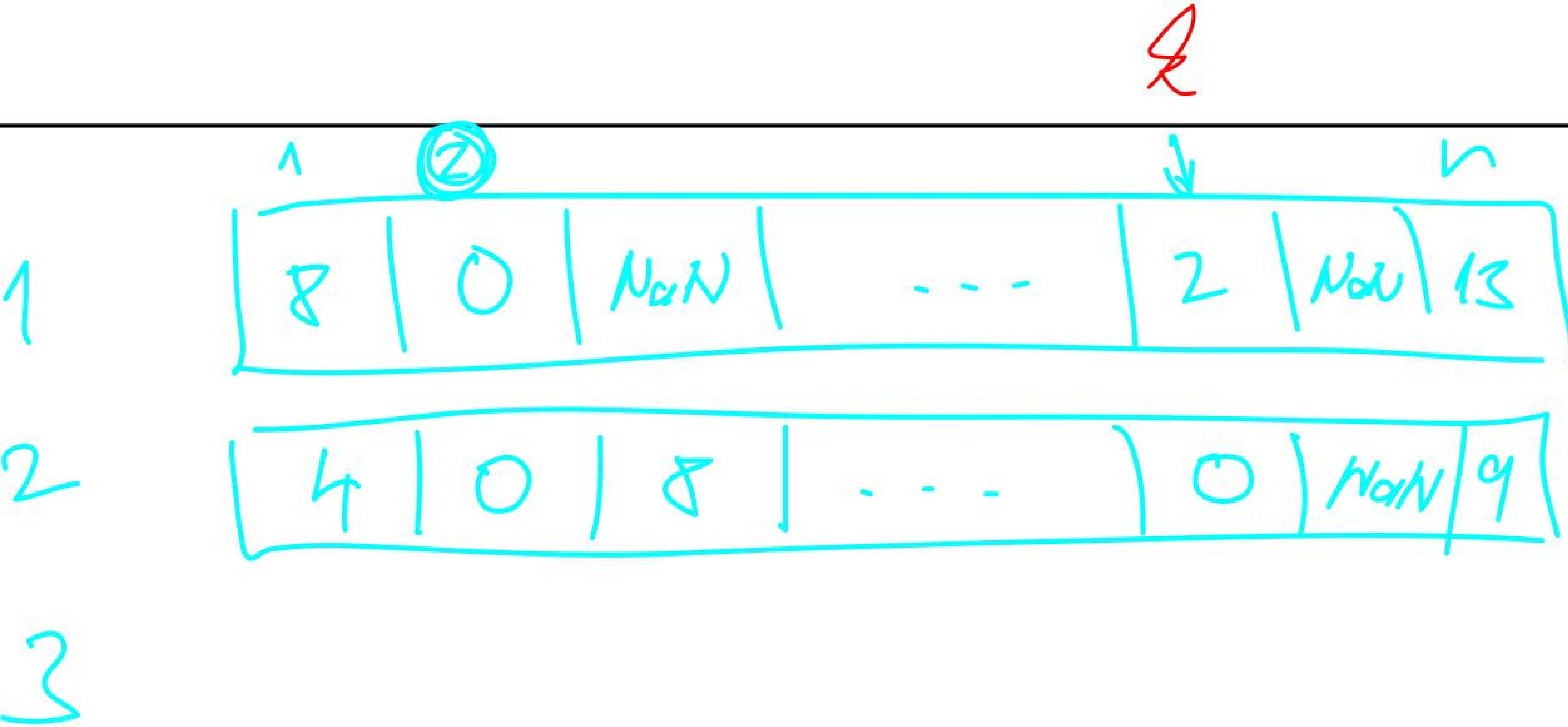
$n = |V|$

$O(n^3)$

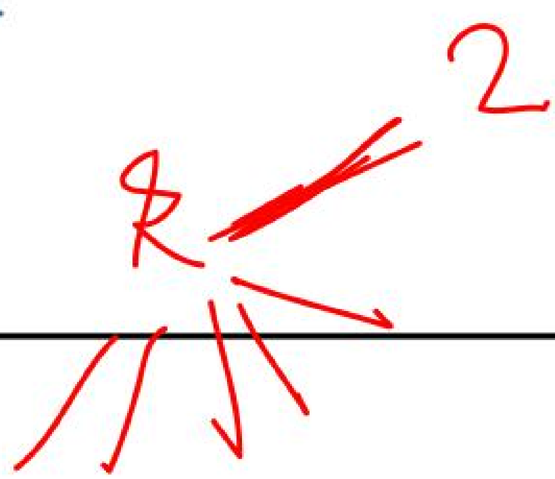
$\frac{n(n-1)}{2} \quad O(n^2)$

Př. 9: matice s podložkou

Předpokládejme, že graf je zadán maticí vah jednotlivých hran. Význačná hodnota v této matici (např. nekonečno, minimální/maximální hodnota číselného typu, NaN apod) indikuje, že mezi příslušnými vrcholy hrana neexistuje. Modifikujte Jarníkův-Primův algoritmus tak, aby nezávisel na počtu hran v grafu a měl složitost $O(n^2)$, kde n je počet uzlů grafu.



$O(n^2)$



Př. 3/1: dezorientovaná kružnice

Každou hranu neorientované kružnice libovolně orientujeme. Jaký je vztah mezi počtem kořenů a listů v takto vzniklém grafu?

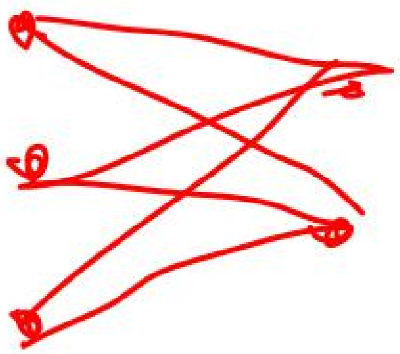
Př. 3/2: bipartitní graf

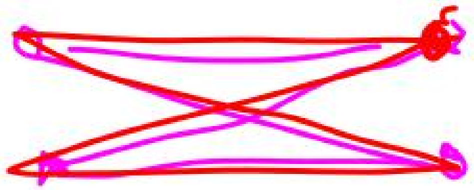
Pro která m, n je úplný bipartitní graf $K_{m,n}$ Hamiltonovský?

Př. 3/2: bipartitní graf

Pro která m, n je úplný bipartitní graf $K_{m,n}$ Hamiltonovský?

$K_{3,2}$





$K_{n,n}$ $n > 1$

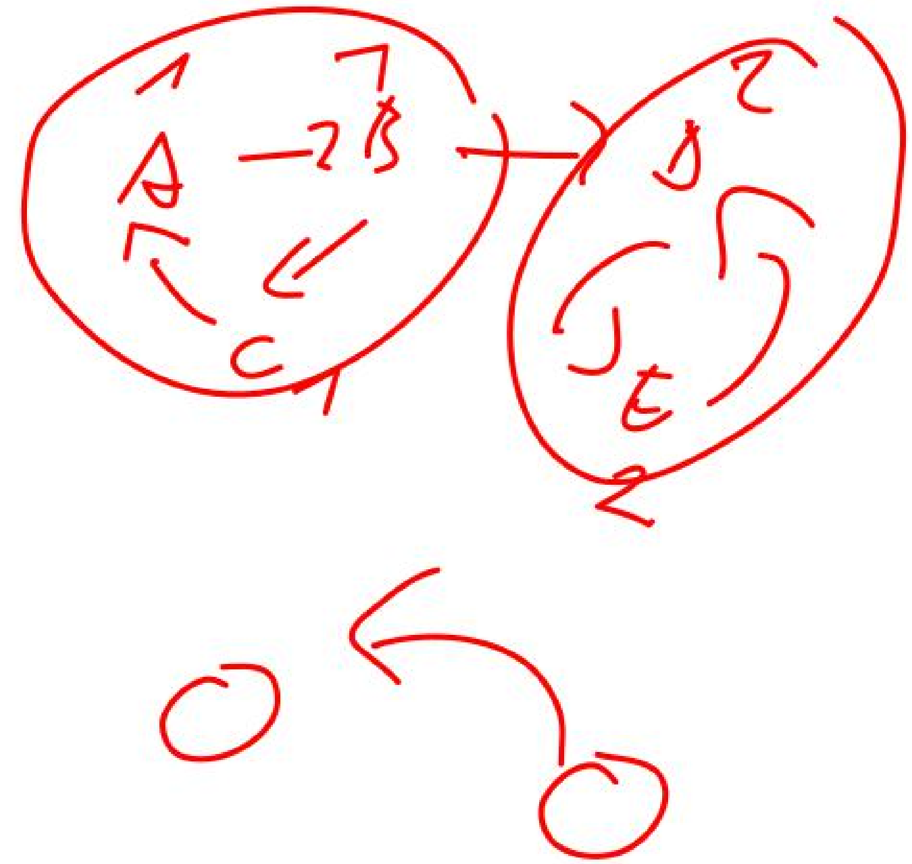
Př. 3/4: ekvivalentní grafy

Dva orientované grafy G1, G2 prohlásíme za slabě ekvivalentní, pokud jejich kondenzace mají stejný počet uzlů. Jaká je asymptotická složitost ověření slabé ekvivalence dvou grafů?

Př. 3/4: ekvivalentní grafy

Dva orientované grafy G1, G2 prohlásíme za slabě ekvivalentní, pokud jejich kondenzace mají stejný počet uzlů. Jaká je asymptotická složitost ověření slabé ekvivalence dvou grafů?

1. KSS_{G_1} $O(n_1+m_1)$, $\#KSS_{G_1}$
2. KSS_{G_2} $O(n_2+m_2)$, $\#KSS_{G_2}$
3. $O(n_1+n_2+m_1+m_2)$

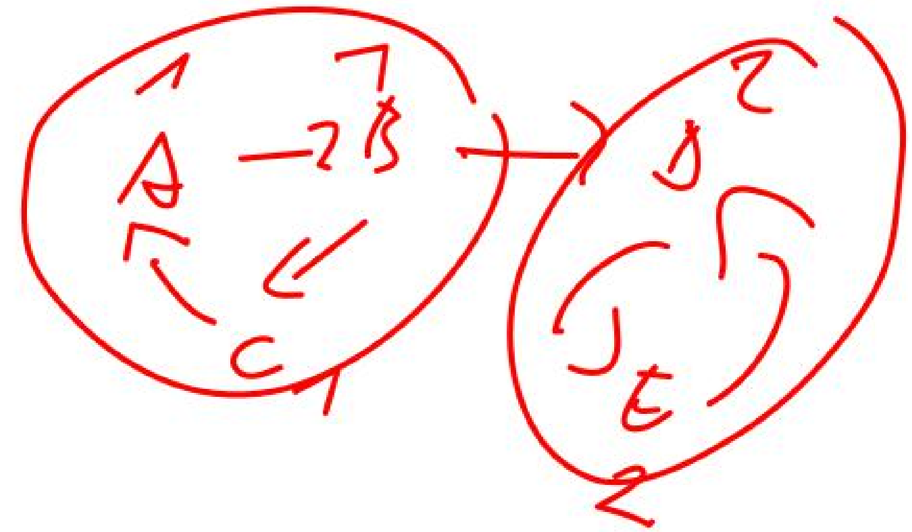


Př. 3/9: hledá se graf!

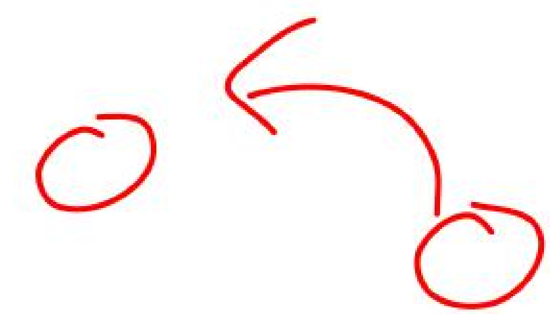
Najděte orientovaný graf, v němž je vstupní i výstupní stupeň každého uzlu nenulový a přitom graf obsahuje uzel, kterým neprochází žádný cyklus.

Př. 3/4: ekvivalentní grafy

Dva orientované grafy G1, G2 prohlásíme za slabě ekvivalentní, pokud jejich kondenzace mají stejný počet uzlů. Jaká je asymptotická složitost ověření slabé ekvivalence dvou grafů?



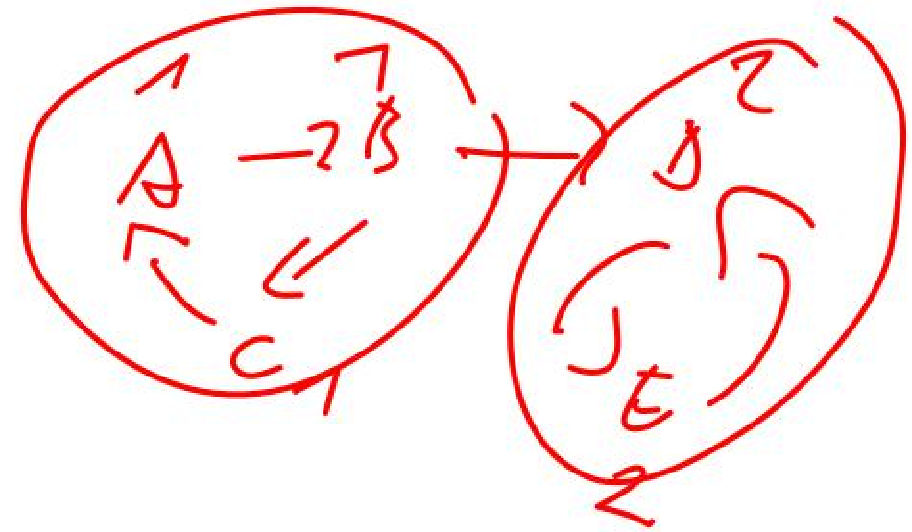
1. KSS_{G_1} $O(n_1+m_1)$, $\#KSS_{G_1}$
2. KSS_{G_2} $O(n_2+m_2)$, $\#KSS_{G_2}$
3. $O(n_1+n_2+m_1+m_2)$

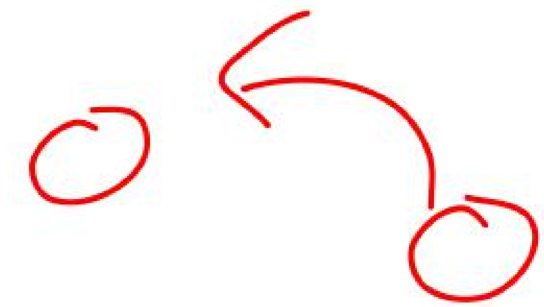


Př. 3/4: ekvivalentní grafy

Dva orientované grafy G1, G2 prohlásíme za slabě ekvivalentní, pokud jejich kondenzace mají stejný počet uzlů. Jaká je asymptotická složitost ověření slabé ekvivalence dvou grafů?

1. KSS_{G_1} $O(n_1+m_1)$, $\#KSS_{G_1}$
2. KSS_{G_2} $O(n_2+m_2)$, $\#KSS_{G_2}$
3. $O(n_1+n_2+m_1+m_2)$

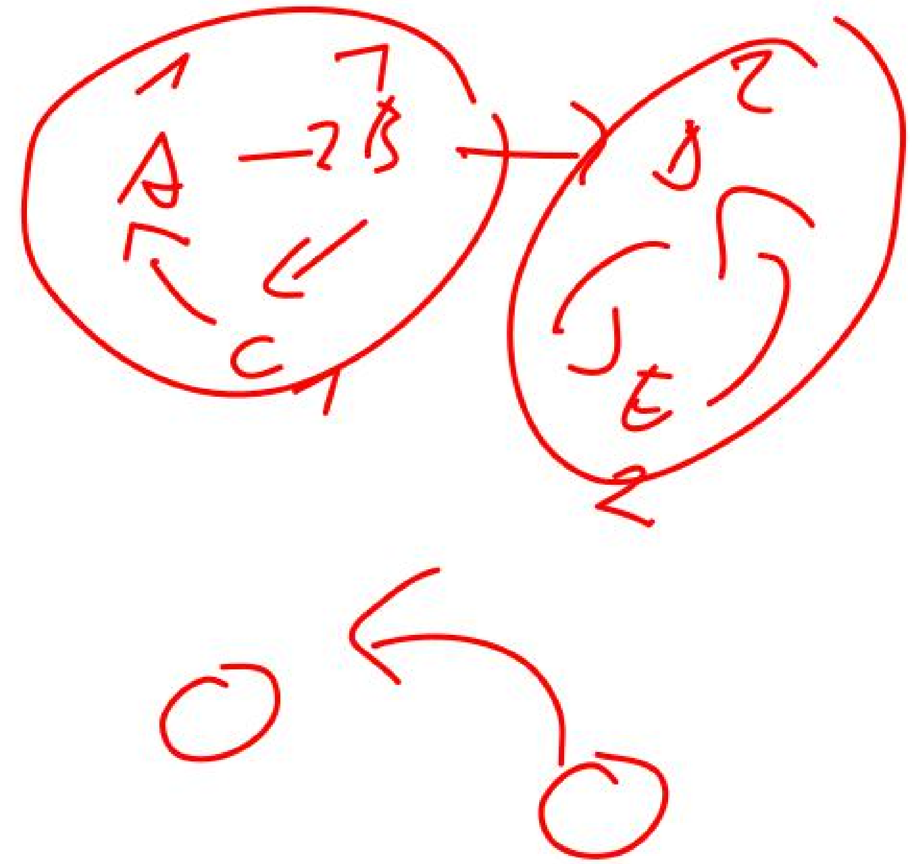




Př. 3/4: ekvivalentní grafy

Dva orientované grafy G1, G2 prohlásíme za slabě ekvivalentní, pokud jejich kondenzace mají stejný počet uzlů. Jaká je asymptotická složitost ověření slabé ekvivalence dvou grafů?

1. KSS_{G_1} $O(n_1+m_1)$, $\#KSS_{G_1}$
2. KSS_{G_2} $O(n_2+m_2)$, $\#KSS_{G_2}$
3. $O(n_1+n_2+m_1+m_2)$



Př. 3/8: homogenní graf

Orientovaný graf prohlásíme za směrově homogenní, pokud vzdálenost (= počet hran na nejkratší možné cestě) každé dvojice uzlů (kořen, list) je vždy stejně velká bez ohledu na to, který kořen nebo list zvolíme. Formulujte efektivní algoritmus, který rozhodne, zda daný graf je směrově homogenní a určete jeho asymptotickou složitost. Lze algoritmus zrychlit, pokud víme, že graf je acyklický?

Př. 3/8: homogenní graf

Orientovaný graf prohlásíme za směrově homogenní, pokud vzdálenost (= počet hran na nejkratší možné cestě) každé dvojice uzlů (kořen, list) je vždy stejně velká bez ohledu na to, který kořen nebo list zvolíme. Formulujte efektivní algoritmus, který rozhodne, zda daný graf je směrově homogenní a určete jeho asymptotickou složitost. Lze algoritmus zrychlit, pokud víme, že graf je acyklický?